Matemática A

Previsão 2 – 2.ª fase

Duração do teste: 150 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

GRUPO I

- Os oito itens deste grupo são de escolha múltipla, em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for elegível.

1. Na pastelaria "tentação", são vendidos vários tipos de bolos. Para cada tipo de bolo, o cliente pode sempre optar por comprar com creme ou sem creme.
As bolas de berlim (com ou sem creme) são um dos vários tipos de bolos vendidos.
Escolhe - se ao acaso um bolo da pastelaria "tentação".

Considera os seguintes acontecimentos :
A : "O bolo escolhido não tem creme"
B : "O bolo escolhido não é uma bola de berlim"

Qual das opções seguintes representa o acontecimento,
"O bolo escolhido é uma bola de berlim com creme" ?

(A) $A \cup B$ **(B)** $\overline{A \cup B}$

(C) $A \cap B$ **(D)** $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}$

2. Um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado 20 vezes.
Qual das seguintes opções representa a probabilidade do acontecimento,
"sair múltiplo de 3, no máximo, 18 vezes"

(A) $\dfrac{3^{20}-41}{3^{20}}$ **(B)** $1-{}^{20}C_{19}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{19}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1}-{}^{20}C_{20}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{20}$

(C) $\dfrac{3^{18}-41}{3^{18}}$ **(D)** $1-{}^{20}C_{19}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{19}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1}+{}^{20}C_{20}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{20}$

3. As alturas de um grupo de pessoas seguem uma distribuição normal de valor médio 160 cm. Aleatoriamente será escolhida uma pessoa do grupo.

Seja X a variável aleatória "altura da pessoa escolhida", sabe - se que $P(X<150)=\frac{1}{4}$.

Considera os acontecimentos:

A: "a altura da pessoa escolhida é superior a 150"

B: "a altura da pessoa escolhida é inferior a 160"

Qual o valor da probabilidade $P(\overline{A}\cup\overline{B})$?

(A) 1 **(B)** $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

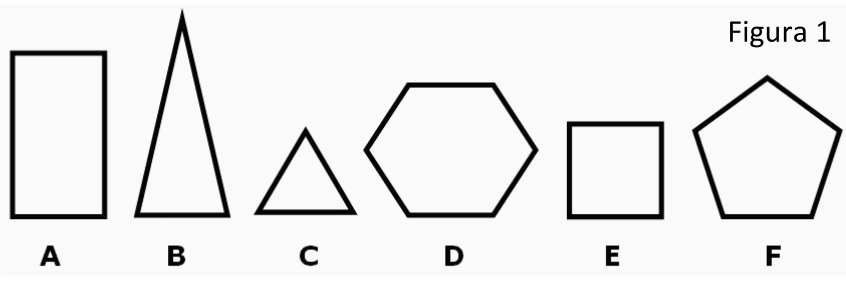
4. Na figura 1 estão representados seis polígonos identificados com as letras $\{A,B,C,D,E,F\}$. Escolhe - se ao acaso um dos 6 polígonos registando - se a letra e o número de vértices.

Considera os seguintes acontecimentos associados a esta experiência aleatória:

A: "O polígono selecionado tem mais de 5 vértices"

B: "A letra do polígono selecionado é uma vogal".

Qual o valor da probabilidade condicionada $P(\overline{A}\,|\,\overline{B})$?



(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 0

5. Seja f uma função de domínio IR^+, definida por $f(x) = \dfrac{e + \ln\left(\dfrac{x}{e}\right)}{x}$, onde e representa o número de Neper e ln o logaritmo Neperiano (logaritmo de base e).

Considera a sucessão de termo geral $u_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$.

Determina $\lim f(u_n)$.

(A) 0

(B) 1

(C) e

(D) $\dfrac{e+1}{e}$

6. Considera f uma função de domínio IR, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Seja $y = 2x + 3$ a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa - 2.

Detremina $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{f(x)+1}{x^2 - 4}$

(A) $\dfrac{1}{2}$

(B) $-\dfrac{1}{2}$

(C) 2

(D) -2

7. Na figura 2 estão representados, partes dos gráficos de 2 funções f e g e uma recta r.
Sabe - se que :

- f é definida pela expressão $f(x)=\dfrac{e^x+2e}{2e}$.
- A recta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x=1$.
- A recta r é uma assímptota oblíqua do gráfico de g quando x tende para mais infinito.

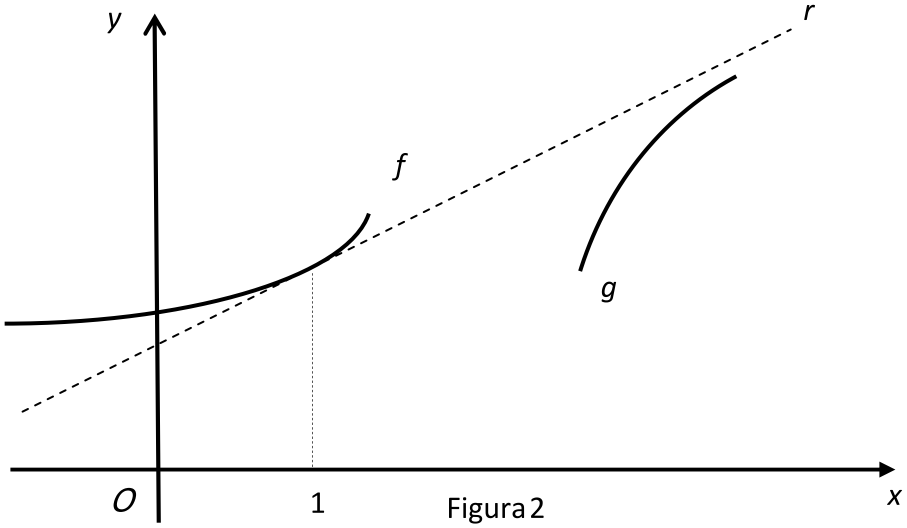


Figura 2

Determina $\lim_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2g(x)-x}{2}+\dfrac{3g(x)}{x}\right]$.

(A) $\dfrac{1}{2}$

(B) $\dfrac{3}{2}$

(C) $\dfrac{5}{2}$

(D) $\dfrac{7}{2}$

8. Na figura 3 está representado um hexágono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice 6 de um certo complexo z. Sabemos que :

- $z = 64cis\,\theta$ (θ representa o argumento de z).
- O ponto A é a imagem geométrica do complexo $\rho cis\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$.

(ρ representa o módulo do complexo).

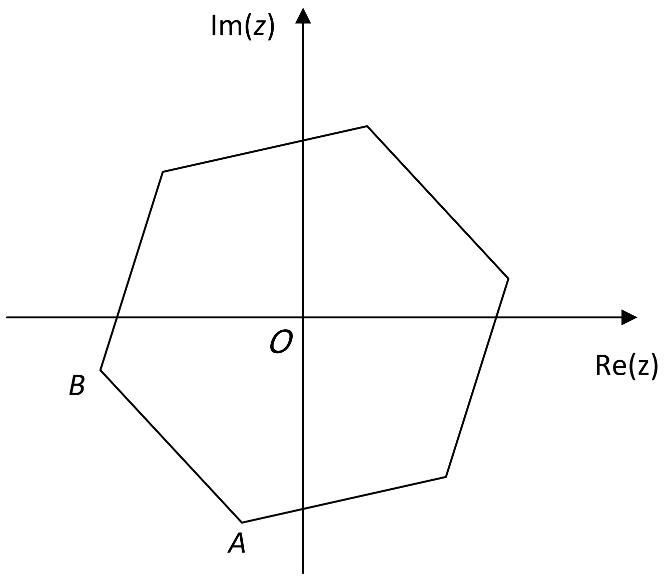


Figura 3

Qual das opções seguintes representa o complexo cuja imagem geométrica é o vértice B.

(A) $64cis\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

(B) $2cis\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

(C) $2cis\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

(D) $64cis\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

ATENÇÂO: quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, apresente sempre o valor exacto

1. Na figura 4 está representado, no plano complexo, um triângulo rectângulo isósceles $[ABC]$.

- os catetos do triângulo $[ABC]$ têm comprimento 3 e são paralelos aos eixos cordenados.
- A recta *CD* é a mediatriz do segmento de recta $[AB]$.

1.1. Define uma condição, em Complexos, que represente a região sombreada (triângulo $[BCD]$), incluindo a fronteira.

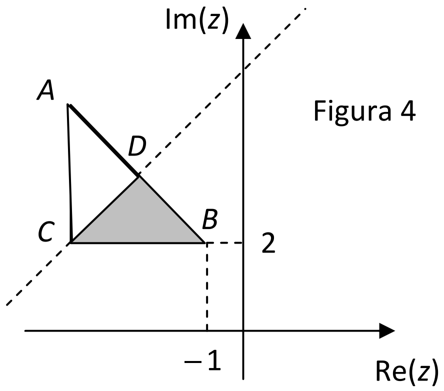


Figura 4

1.2. Seja *w* o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto *C*.

Indica a que quadrante pertence o complexo $\frac{1}{w}$

(justifica analiticamente escrevendo $\frac{1}{w}$ na forma algébrica).

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória, $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$.

2.1. Prova que,

se *A* e *B* forem independentes então $\overline{A}$ e $\overline{B}$ também o são.

2.2. Considera agora que $P(B) = 2P(A)$; $P(A|B) = \frac{1}{3}$ e $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{9}$.

Determina $P(A)$.

3. Seja f a funçaõ, de domínio IR, definida por :

$$f(x) = 1 + 3x^2 e^{-x}.$$

Resolve as duas alíneas seguintes sem recorrer à calculadora
(a não ser para eventuais cálculos numéricos).

3.1. Mostra que f tem um único mínimo e determina - o.

3.2. Mostra que, no intervalo $]-1,0[$, a equação $f(x) = 4$ tem pelo menos uma solução.

4. Seja f, definida em $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} & \text{se } 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2} \\ e^{senx + k} & \text{se } \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

4.1. Determina k de modo que a função f seja contínua.

4.2. Considera $k = 0$, determina $f^{`}(\pi)$ por definição.

5. Considera a função f, de domínio $IR \setminus \{1\}$, definida por :

$$f(x)=\frac{e^x}{x-1}$$

Resolve as duas alíneas seguintes sem recorrer à calculadora

5.1. Resolve a equação $\ln[f(x)]=x$

5.2. Estuda f quanto à existência de assímptotas verticais e horizontais do seu gráfico.

5.3. No intervalo $[0,5]$, a equação $f(x)=10$ tem duas soluções.

Sejam A e B os pontos cujas abcissas são as soluções da equação referida.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora,
detemina a área do triângulo $[AOB]$, sendo O a origem do referncial.

- Representa todos os gráficos utilizados na resolução do problema
- Assinala os pontos relevantes (vértices do triângulo)
- Efectua os cálculos numéricos para determinar a àrea pedida

Apresenta o resultado com duas casas decimais.

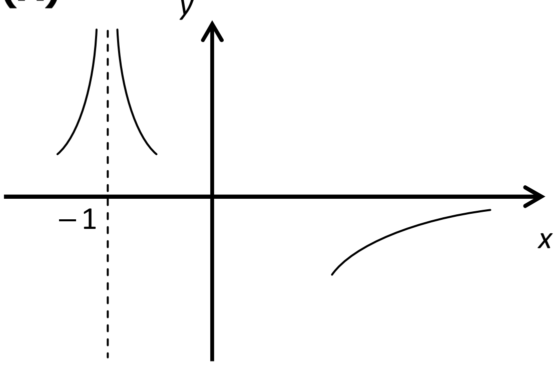
6. Seja f uma função de domínio $IR \setminus \{-1\}$.
Sabe - se que :

- f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$
- $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$

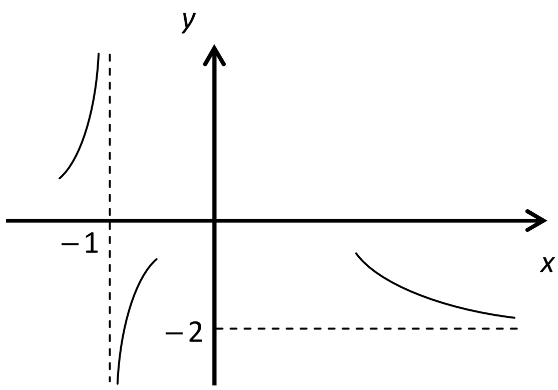
Em qual das figuras pode estar representado, parte do gráfico da função f', função derivada de f ?

NOTA : Numa breve composição indica a resposta correcta e justifica as razões que te levaram a anular cada uam das respostas erradas.

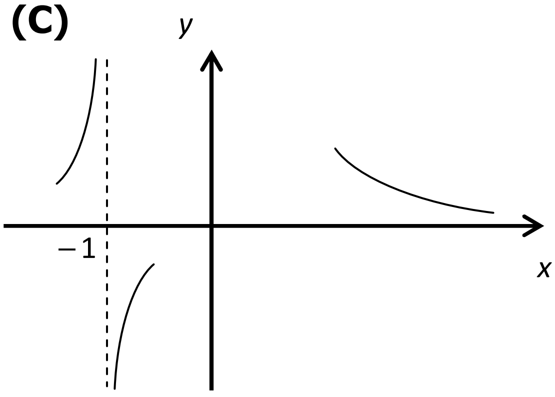
(A)



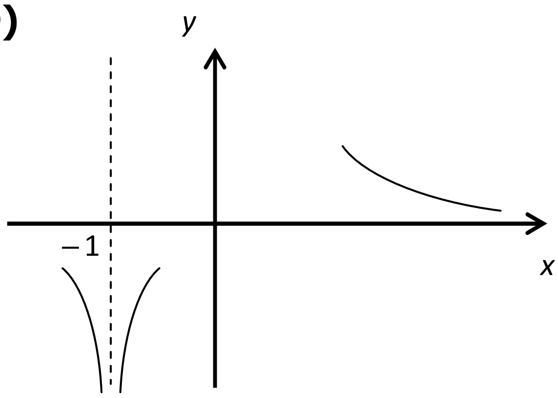
(B)



(C)



(D)



FIM