Matemática A

Previsão 2

Duração do teste: 90 minutos | **4.06.2012**

12.º Ano de Escolaridade

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

GRUPO I

- Os oito itens deste grupo são de escolha múltipla, em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for elegível.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma determinada experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega)$.
sabe - se que :
• $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3$
• $P(A) = 0{,}1$
• A e B são acontecimentos incompatíveis
Qual o valor de $P(B)$?

(A) 0,3 **(B)** 0,4 **(C)** 0,5 **(D)** 0,6

2. 6 amigos vão assistir a um jogo de futebol da Seleção Nacional.
Dos 6 amigos, 2 são da cidade do Porto, 2 são de lisboa e 2 são de Viseu.
No estádio, sentam - se numa fila de 6 cadeiras seguidas.
Qual a probabilidade de os amigos da mesma cidade, sentarem em lugares consecutivos?

(A) $\frac{1}{15}$ **(B)** $\frac{1}{9}$ **(C)** $\frac{1}{18}$ **(D)** $\frac{1}{21}$

3. As alturas dos indivíduos de uma população distribuem - se normalmente com média μ e devio padrão 10cm.
Seja X a variável aleatória que representa a altura de um indivíduo.
Sabe - se que $P(X > 182) = 0{,}15865$.
O valor médio desta distribuição é :

(A) $\mu = 170$

(B) $\mu = 171$

(C) $\mu = 172$

(D) $\mu = 173$

4. Numa turma do 12.º Ano com 12 raparigas e 7 rapazes, selecionam - se duas pessoas para um trabalho de grupo. sabe - se que foram selecionadas duas pessoas do mesmo sexo.
Qual a probabilidade de terem sido escolhidas duas raparigas?

(A) $\frac{22}{29}$

(B) $\frac{1}{21}$

(C) $\frac{21}{171}$

(D) $\frac{66}{171}$

5. Na fugura 1 está parte da representação gráfica de uma função f, de domínio $IR \setminus \{2\}$.

Considera a sucessão de termo geral $u_n = 2 + \dfrac{2}{n-2}$.

Qual é o valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n)$?

(A) $+\infty$

(B) $-\infty$

(C) 2^+

(D) 2^-

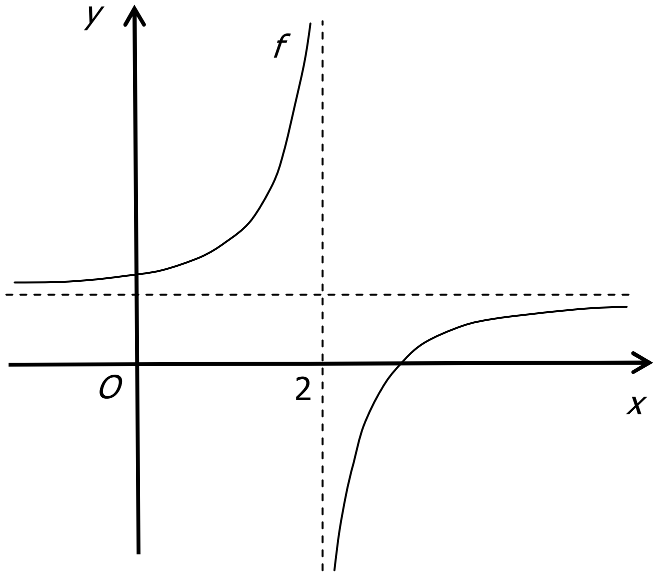


Figura 1

6. Na figura 2, estão representados num referencial o.n. xOy, os gráficos de duas funções f e g. As duas funções têm domíno $]1,4[$.

Como o gráfico indica, f tem um máximo para $x = 2$ e g tem um mínimo para $x = 2$.

Qual das opções seguintes é veraddeira para qualquer x pertencente ao domínio?

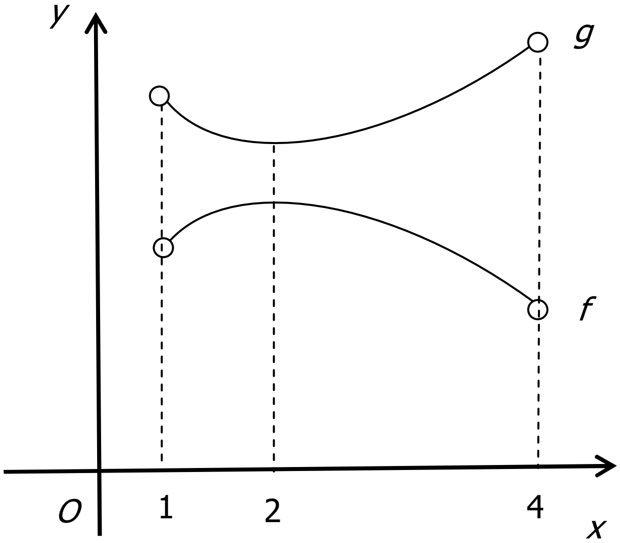


Figura 2

(A) $f`(x) \times g`(x) \geq 0$

(B) $f`(x) \times g`(x) < 0$

(C) $f``(x) \times g``(x) \geq 0$

(D) $f``(x) \times g``(x) < 0$

7. Seja g uma função de domínio $[0,+\infty[$.

• g é contínua no seu domínio.

• $y = 2x - 1$ é assímptota oblíqua do gráfico de g.

Seja f uma função de domínio $[0,+\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 \times g(x) - 1}{x} & \text{se } x \geq 5 \\ \\ e^x - \dfrac{1}{2} & \text{se } 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

qual dos valores seguintes é igual a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

8. Na figura 3, estão representados, no plano complexo, os pontos A e B.

Sabe - se que :

• A e B são as imagens geométricas de dois complexos Z e W, respetivamente.

• Z e W são duas das raízes (consecutivas) de índice n de um mesmo número complexo.

• A amplitude do ângulo AOB é $\dfrac{\pi}{4}$

Em qual das seguintes opções está indicado o valor de n?

(A) 6

(B) 7

(C) 8

(D) 9

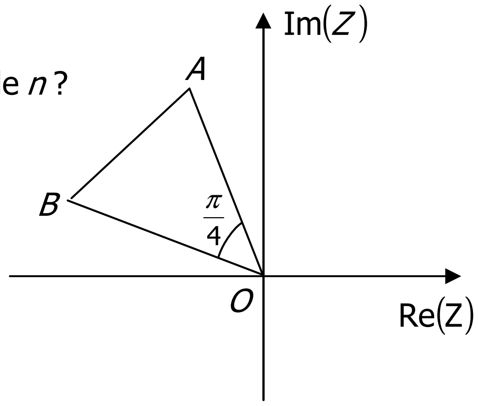


Figura 3

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

ATENÇÂO: quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, apresente sempre o valor exacto

1. Sejam Z_1 e Z_2, dois números complexos, tais que :

- $Z_1 = 1 + i$

- $Z_2 = \rho cis\left(\frac{n\pi}{8}\right)$, $n \in IN$

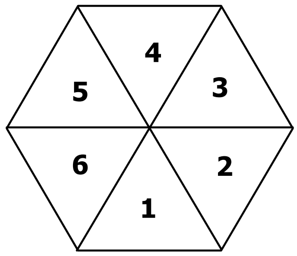
Resolve os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

1.1. Determina o menor valor de n, de forma a que, $Z_1 \times Z_2$ seja um imaginário puro

1.2. Considera $n = 2$, justifica que a imagem geométrica do complexo $Z_1 + Z_2$, pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

1.3. Calcula as raízes cúbicas de Z_1 e determina a área do polígono, cujos vértices, são as imagens geométricas das raízes cúbicas obtidas.

Fugura 4



2. A Figura 4 representa um rapa hexagonal.
Considera a seguinte experiência :

Rodar 3 vezes o rapa e verificar o número saído.

Seja X a variável aleatória «número de vezes que, nos 3 lançamentos, sai par»

2.1. Constrói a tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória X

2.2. Considera agora uma caixa com 3 bolas Brancas e 2 Pretas e a realização da seguinte experiência :

O rapa hexagonal é colocado a rodar uma única vez, se sair par, colocam - se na caixa duas bolas, uma branca e outra preta, se sair ímpar, retiram - se da caixa duas bolas, uma branca e outra preta.
Após este processo retiramos uma bola da caixa.

Sejam A e B os seguintes acontecimentos.

A : «A bola retirada da caixa é Preta»
B : «O número saído no rapa é par»

Indica o valor de $P(A \mid B)$ sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.
Deves indicar a resposta com base na Lei de laplace e explicar :

- O significado de $P(A \mid B)$ no contexto do problema
- Número de casos possíveis
- Número de casos favoráveis

2.3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória, sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$. Sabemos que $P(B) \neq 0$.

Mostra que $\dfrac{P(A) - P(\overline{A} \cup \overline{B}) \times P(A)}{P(B)} = P(A) \times P(A \mid B)$

3. Na Figura 5 está representado, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, de domínio IR^+, cuja expressão analítica é $f(x) = 2x - x \ln x$

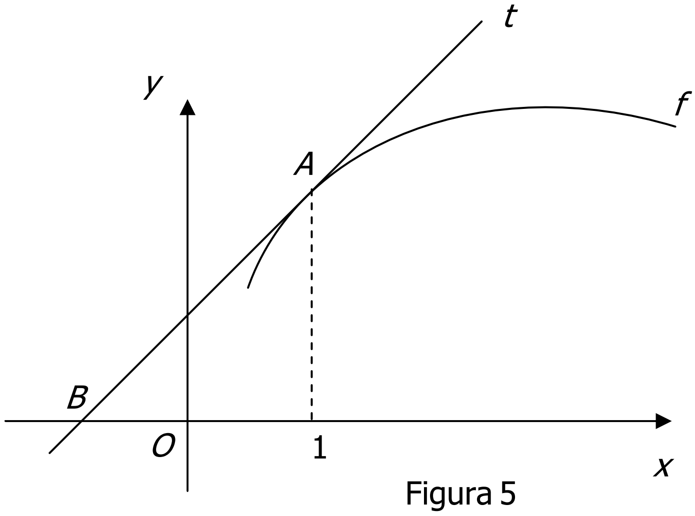


Figura 5

- A recta t é tangente ao gráfico de f, no ponto A, de abcissa 1.
- Seja B o ponto de interseção da recta t com o eixo das abcissas.

Determina a área do triângulo $[AOB]$.

4. De uma função f de domínio IR^+, sabe - se que :

A sua derivada $f`$, é dada por $f`(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$

estuda a função f, quanto ao sentido das concavidades e pontos de inflexão.

5. Considera a função f, de domínio IR, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x} & \text{se} \quad x > 0 \\ e^x & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Estuda a continuidade da função f em todo o seu domínio.

6. Na figura 6, estão representa dos, em referencia l o.n. xOy :

- Um arco de circunferê ncia OC, de centro em D e raio 2.
- Um segmento de recta $[AB]$.

Um ponto P, de ordenada $\frac{5}{2}$, desloca - se sobre o segmento $[AB]$, nunca coincidind o com A nem com B.

∘ $[PE]$ é paralelo a $[BD]$.

∘ $[ED]$ é um raio da circunferê ncia de centro D.

∘ $[OD]$ é perpendicu lar a $[BD]$.

Seja x a amplitude do ângulo ODE, em radianos. Para cada posição do ponto P, considera o trapézio $[PBDE]$ exemplific ado na figura.

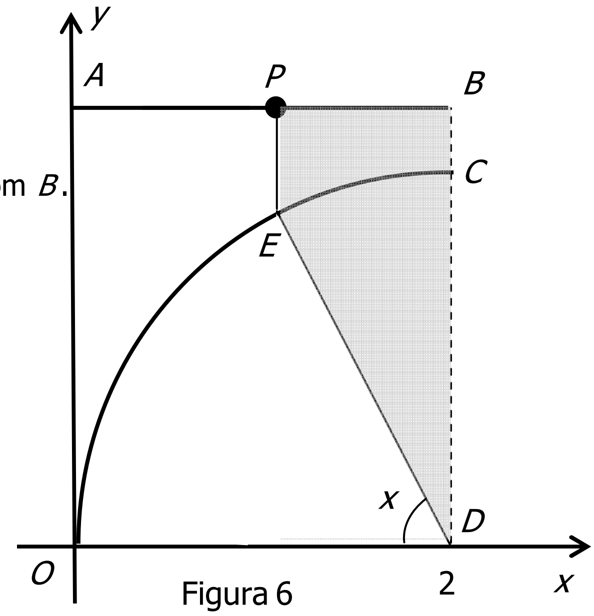


Figura 6

Considera ainda uma função f, que a cada valor da amplitude x, do ângulo ODE, faz correspond er a área do trapézio $[PBDE]$.

6.1. Indica, atendendo apenas ao contexto do problema, o domínio da função f

6.2. Mostra que $f(x) = 5cox - sen(2x)$

6.3 Considera agora que o domínio da função f é $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Considera ainda uma função g, também de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por $g(x) = f(x) - 3$.

A função g tem zeros no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$? justifica

FIM