



Previsão Exame Nacional de Matemática A – 2012

.....
Previsão 1 – 1ª fase

Matemática A

Previsão 1

Duração do teste: 90 minutos | **4.06.2012**

12.º Ano de Escolaridade

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

GRUPO I

- Os oito itens deste grupo são de escolha múltipla, em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
 - Escreva na sua folha de respostas apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
 - Não apresente cálculos, nem justificações.
 - Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for elegível.
-

- 1.** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma determinada experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), tal que, $A \subset B$ e $P(B) \neq 0$. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $P(A \cup B) - P(A) = 0$

(B) $P(A) - P(A \cap B) = 0$

(C) $P(A | B) = \frac{P(B)}{P(A)}$

(D) $P(B | A) = \frac{P(A)}{P(B)}$

- 2.** Numa caixa existem 22 bolas.

- 15 bolas estão pintadas de vermelho.
- 7 bolas estão pintadas de azul.

Retiram - se 7 bolas da caixa e colocam - se num saco.

Qual a probabilidade do saco ficar com todas as bolas da mesma cor ?

(A) $\frac{{}^{15}C_7 + 1}{{}^{22}C_7}$ **(B)** $\frac{{}^{15}C_7 + 2}{{}^{22}C_7}$ **(C)** $\frac{{}^{15}A_7 \times 2! + {}^7A_7}{{}^{22}A_7}$ **(D)** $\frac{{}^{15}A_7 + {}^7A_7 \times 2!}{{}^{22}A_7}$

- 3.** A variável aleatória X segue uma distribuição Normal $N(28,3)$.
Seja a um número real pertencente ao intervalo $[25,31]$.
Qual das afirmações é verdadeira para qualquer $a \in [25,31]$?

(A) $P(X > a) > 0,5$

(B) $P(X < a) < 0,5$

(C) $P(X > a) > 0,85$

(D) $P(X > a) < 0,85$

- 4.** Os números 351, 27 e 1 são os três últimos elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal.
Qual o quarto elemento da linha seguinte?

(A) 352

(B) 378

(C) 3270

(D) 3276

5. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico de uma função f , definida por $f(x) = \ln(ex^2)$.

- O ponto P pertence ao gráfico de f e tem abcissa a .
- O ponto A pertence ao eixo das ordenadas.
- O ponto B tem abcissa $3a$ e ordenada nula

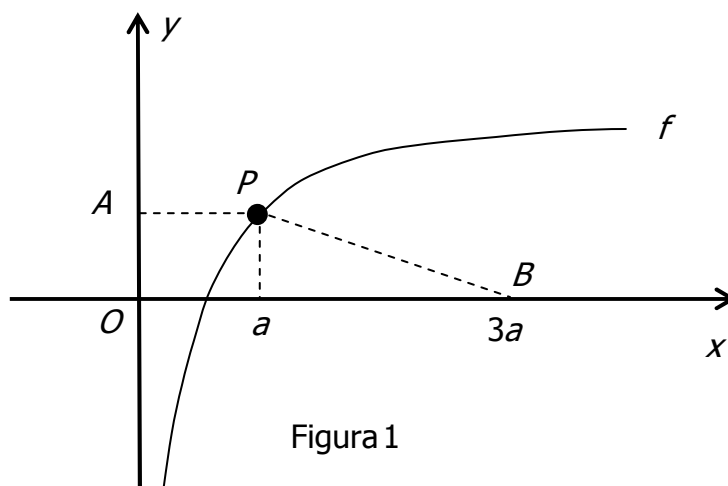
Define, em função de a , a área do trapézio $[OAPB]$

(A) $2a + 4a \ln a$

(B) $2 + 4a \ln a$

(C) $2a + 4a \ln(3a)$

(D) $4 + 2a \ln(3a)$



6. Seja f a função definida por $f(x) = \log(e^x - 5) + \frac{1}{2x - 8}$.

Seja A o Domínio de f .

Que opção representa, na forma de intervalo de números reais, o conjunto A ?

(A) $D =]5,8[\cup]8,+\infty[$

(B) $D =]\ln 5,4[\cup]4,+\infty[$

(C) $D =]e^5,4[\cup]4,+\infty[$

(D) $D =]\ln 5,8[\cup]8,+\infty[$

7. Na figura 2, estão representados, em referencial o.n. xOy :

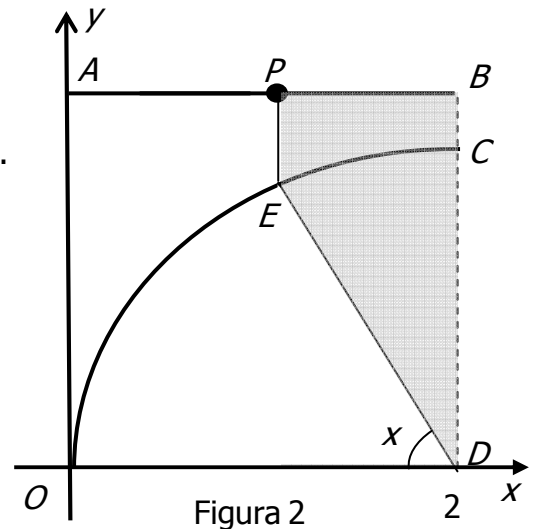
- Um arco de circunferência OC , de centro em D e raio 2.
- Um segmento de recta $[AB]$.

Um ponto P , de ordenada $\frac{5}{2}$, desloca - se sobre o segmento $[AB]$, nunca coincidindo com A nem B .

- $[PE]$ é paralelo a $[BD]$
- $[ED]$ é um raio da circunferência de centro D .
- $[OD]$ é perpendicular a $[BD]$.

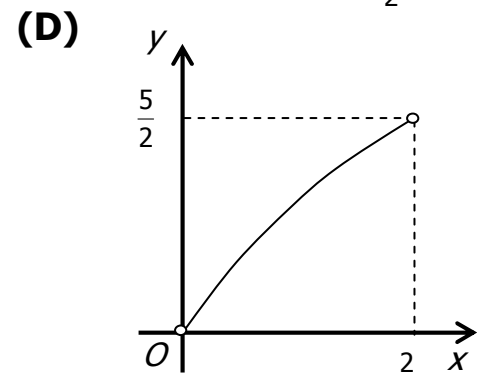
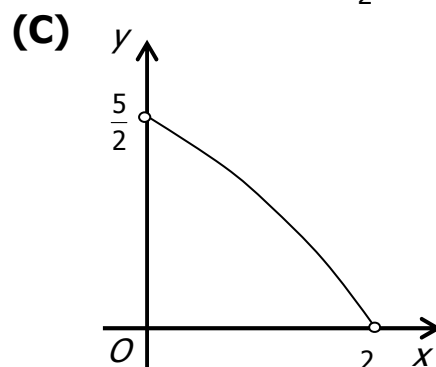
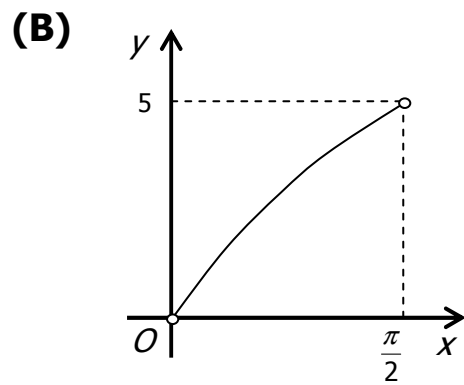
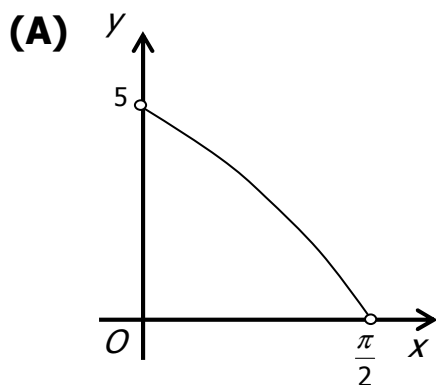
Seja x a amplitude do ângulo ODE , em radianos.

Para cada posição do ponto P , considera o trapézio $[PBDE]$, como exemplificado na figura.



Considera ainda uma função f , que a cada valor da amplitude x , do ângulo ODE , faz corresponder a área do trapézio $[PBDE]$.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o gráfico da função f ?



8. Na Figura 3, está representado, no plano complexo, a sombreado, o triângulo $[OAB]$. Sabemos que :

- O ponto A é a imagem geométrica do número complexo $Z = 2cis\theta$, com $\theta = \arg(Z)$.
- O ponto A é um vértice de um Hexágono regular, centrado na origem, com dois outros vértices no Eixo dos Reais, como a figura ilustra.
- O ponto B pertence ao Eixo dos Imaginários e é o ponto médio de um lado do Hexágono

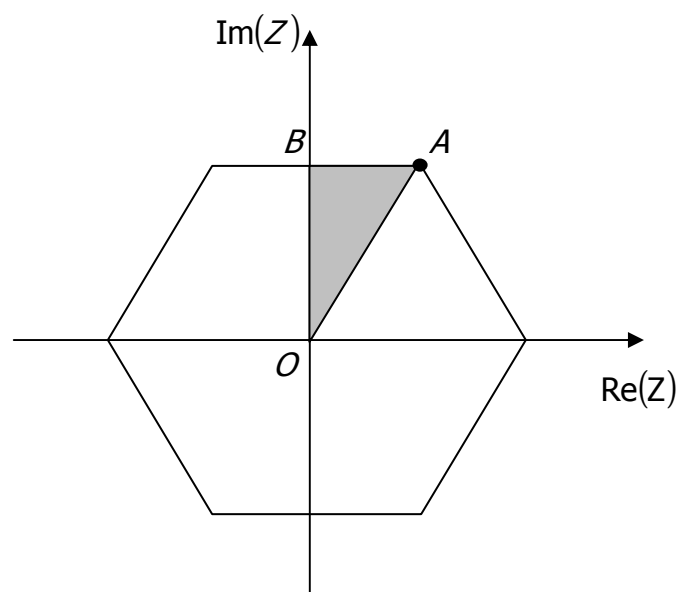


Figura 3

Qual das condições seguintes define, no plano complexo, a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $\frac{\pi}{6} \leq \arg(Z) \leq \frac{\pi}{2} \wedge \text{Im}(z) \leq \sqrt{3}$

(B) $\frac{\pi}{3} \leq \arg(Z) \leq \frac{\pi}{2} \wedge \text{Im}(z) \leq 2$

(C) $\frac{\pi}{3} \leq \arg(Z) \leq \frac{\pi}{2} \wedge \text{Im}(z) \leq \sqrt{3}$

(D) $\frac{\pi}{6} \leq \arg(Z) \leq \frac{\pi}{2} \wedge \text{Im}(z) \leq 2$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

ATENÇÃO: quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, apresente sempre o valor exacto

1. No conjunto dos números complexos, i designa a unidade imaginária.

- \bar{Z} representa o conjugado de Z
- $\text{Re}(Z)$ representa a parte real de Z

1.1. determina o valor da expressão $\frac{i^{3n+1} - i^{3n}}{i^{3n+2}} \times \sqrt{2} \text{cis} \frac{\pi}{3}$. $n \in \mathbb{N}$

apresenta o resultado na forma trigonométrica.

1.2. Mostra que $|Z + 1|^2 - Z \times \bar{Z} = 2 \times \text{Re}(Z) + 1$

2. A marca de automóveis BNW encomendou um estudo de mercado.

Numa amostra de 1000 automóveis, registaram - se os seguintes dados :

- 7% dos automóveis eram da marca BNW
- Dos automóveis da marca BNW sabe - se que, 40% consomem bateria, 50% gasolina e 10% gasóleo.
- Dos restantes automóveis, sabe - se que, 10% consomem bateria, 70% gasolina e 20% gasóleo.
- Cada automóvel possui apenas um tipo de consumo.

Escolhe - se ao acaso um dos 1000 automóveis da amostra.

2.1. Verificou - se que o automóvel escolhido se deslocava a gasóleo.

Qual a probabilidade de ser da marca BNW? (2 c.d.)

2.2. Considera agora 70 automóveis da marca BNW, em que :

- 28 consomem bateria
- 35 consomem gasolina
- 7 consomem gasóleo

Vão ser escolhidos aleatoriamente 7 automóveis para uma exposição.

Qual a probabilidade de ser seleccionado, pelo menos, um automóvel de cada tipo? (2 c.d.)

3. Considera a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x+1} - e}{x} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^x}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Resolve os 2 itens seguintes recorrendo exclusivamente a métodos analíticos

3.1. Faz o estudo completo das assíptotas de f

3.2. Averigua se existe solução da equação $f(x) = -\frac{1}{3}$ no intervalo $] -2, -1[$

4. No dia Europeu sem carros, num determinado local, o nível de poluição (em mg / l) do ar, em função do tempo t , é dado pela expressão

$$f(t) = \frac{1 + t - \ln(t + 1)}{t + 1} \quad t \in [0, 24]$$

onde t representa a hora do dia .

4.1. Determina o nível de poluição às 13 horas e trinta minutos nesse local, no dia Europeu sem carros.

4.2. Sabe - se que, por norma, a poluição do ar nesse local, diminui durante o período nocturno.

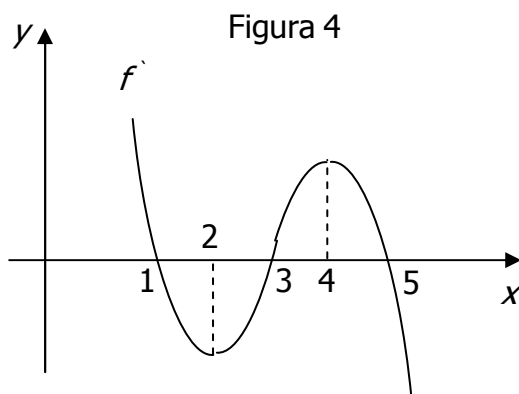
Devido a um fenómeno desconhecido, nas primeiras horas do dia Europeu sem carros (ainda durante a noite) a poluição nesse local, sofreu um aumento inesperado e estranho.

Determina, sem recorrer à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos, a que horas se deu esse fenómeno estranho.

Apresenta o resultado em horas e minutos.

4.3. Utilizando as capacidades gráficas da calculadora, indica durante quanto tempo, a poluição do ar foi inferior a $0,7 mg / l$. (arredondamentos intermédios a uma casa decimal, apresenta resultado em horas e minutos - apresenta todos os gráficos e pontos relevantes)

5. Na Figura 4, está representado, num referencial o.n. xOy , o gráfico da função f' , derivada de uma função f .

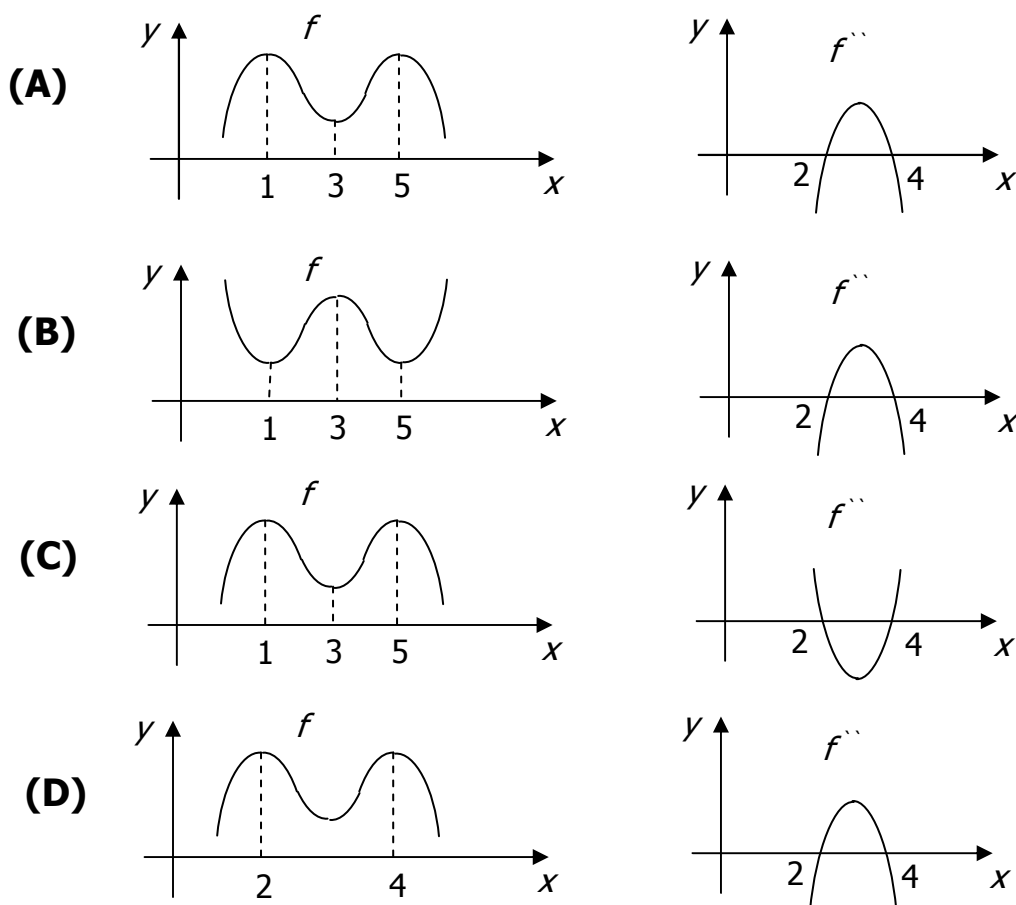


Sabe-se que :

- f é função polinomial.
- f' representada na Figura 4 tem 3 zeros, para $x = 1, x = 3$ e $x = 5$.
- f' representada na Figura 4, tem máximo para $x = 4$ e mínimo para $x = 2$

Em qual das opções seguintes podem estar representados os gráficos das funções f e f'' ?

Numa breve composição, indica a resposta correcta e explica uma razão para anulares cada uma das respostas erradas.



6. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} , com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Sabe-se que :

- $f(1) = 3$

- $f'(1) = 5$

f' representa a função derivada de f

Determina $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x^2 - x}$ (apresenta todos os cálculos efectuados)

7. Resolve o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

FIM