



Previsão Exame Nacional de Matemática A – 2012

Previsão 2 – 2ª fase

Matemática A

Previsão 2 – 2.ª fase

Duração do teste: 150 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

A inscrição nas previsões para 2013 dá acesso à resolução em vídeos das Previsões anteriores.

Inscreve-te em “Especial 12.º Ano”, após inscrição recibes dados de acesso à tua conta.

As resoluções anteriores já estão disponíveis.

As Previsões para 2013 (enunciados) são entregues na morada de inscrição, via CTT, dia 7 de Junho de 2013. As resoluções em vídeo ficam disponíveis na tua conta pessoal em explicamat.pt

Ao comprar estás a contribuir para este projecto de explicações grátis para todos, obrigado pelo teu contributo.

GRUPO I

- Os oito itens deste grupo são de escolha múltipla, em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
 - Escreva na sua folha de respostas apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
 - Não apresente cálculos, nem justificações.
 - Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for elegível.
-

- 1.** Na pastelaria "tentação", são vendidos vários tipos de bolos. Para cada tipo de bolo, o cliente pode sempre optar por comprar com creme ou sem creme. As bolas de berlim (com ou sem creme) são um dos vários tipos de bolos vendidos. Escolhe - se ao acaso um bolo da pastelaria "tentação".

Considera os seguintes acontecimentos :

A : "O bolo escolhido não tem creme"

B : "O bolo escolhido não é uma bola de berlim"

Qual das opções seguintes representa o acontecimento, "O bolo escolhido é uma bola de berlim com creme"?

(A) $A \cup B$

(B) $\overline{A \cup B}$

(C) $A \cap B$

(D) $\overline{A \cap B}$

- 2.** Um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado 20 vezes. Qual das seguintes opções representa a probabilidade do acontecimento, "sair múltiplo de 3, no máximo, 18 vezes"

(A) $\frac{3^{20} - 41}{3^{20}}$

(B) $1 - {}^{20}C_{19} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{19} \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 - {}^{20}C_{20} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$

(C) $\frac{3^{18} - 41}{3^{18}}$

(D) $1 - {}^{20}C_{19} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{19} \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 + {}^{20}C_{20} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{20}$

- 3.** As alturas de um grupo de pessoas seguem uma distribuição normal de valor médio 160 cm. Aleatoriamente será escolhida uma pessoa do grupo.

Seja X a variável aleatória "altura da pessoa escolhida", sabe-se que $P(X < 150) = \frac{1}{4}$.

Considera os acontecimentos :

A : "a altura da pessoa escolhida é superior a 150"

B : "a altura da pessoa escolhida é inferior a 160"

Qual o valor da probabilidade $P(\bar{A} \cup \bar{B})$?

- (A) 1 (B) $\frac{3}{4}$
- (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

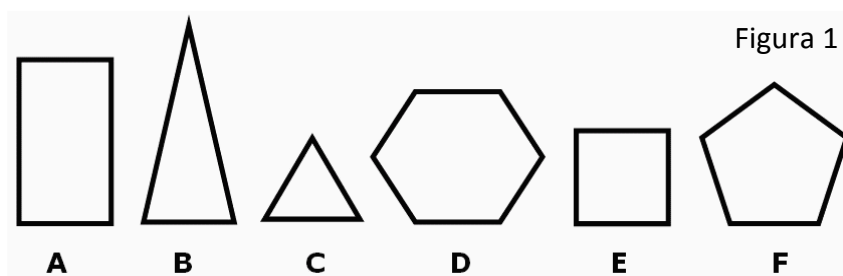
- 4.** Na figura 1 estão representados seis polígonos identificados com as letras {A, B, C, D, E, F}. Escolhe-se ao acaso um dos 6 polígonos registando-se a letra e o número de vértices.

Considera os seguintes acontecimentos associados a esta experiência aleatória :

A : "O polígono selecionado tem mais de 5 vértices"

B : "A letra do polígono selecionado é uma vogal".

Qual o valor da probabilidade condicionada $P(\bar{A} | \bar{B})$?



- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

5. Seja f uma função de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \frac{e + \ln\left(\frac{x}{e}\right)}{x}$, onde e representa o número de Neper e \ln o logaritmo Neperiano (logaritmo de base e).

Considera a sucessão de termo geral $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

Determina $\lim f(u_n)$.

(A) 0

(B) 1

(C) e

(D) $\frac{e+1}{e}$

6. Considera f uma função de domínio \mathbb{R} , com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Seja $y = 2x + 3$ a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -2 .

Determina $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) + 1}{x^2 - 4}$

(A) $\frac{1}{2}$

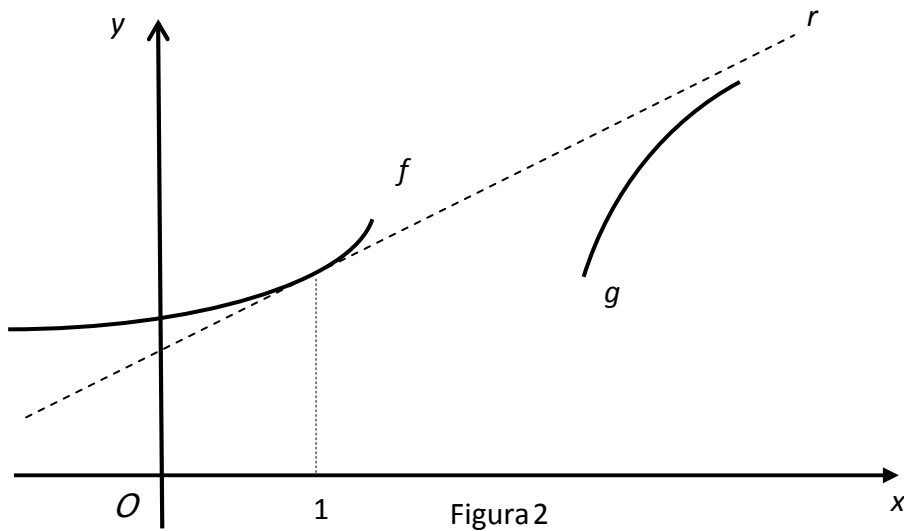
(B) $-\frac{1}{2}$

(C) 2

(D) -2

7. Na figura 2 estão representados, partes dos gráficos de 2 funções f e g e uma recta r .
Sabe - se que :

- f é definida pela expressão $f(x) = \frac{e^x + 2e}{2e}$.
- A recta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 1$.
- A recta r é uma assíntota oblíqua do gráfico de g quando x tende para mais infinito.



Determina $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2g(x) - x}{2} + \frac{3g(x)}{x} \right]$.

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{5}{2}$

(D) $\frac{7}{2}$

8. Na figura 3 está representado um hexágono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice 6 de um certo complexo z . Sabemos que :

- $z = 64cis\theta$ (θ representa o argumento de z).
- O ponto A é a imagem geométrica do complexo $\rho cis\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$. (ρ representa o módulo do complexo).

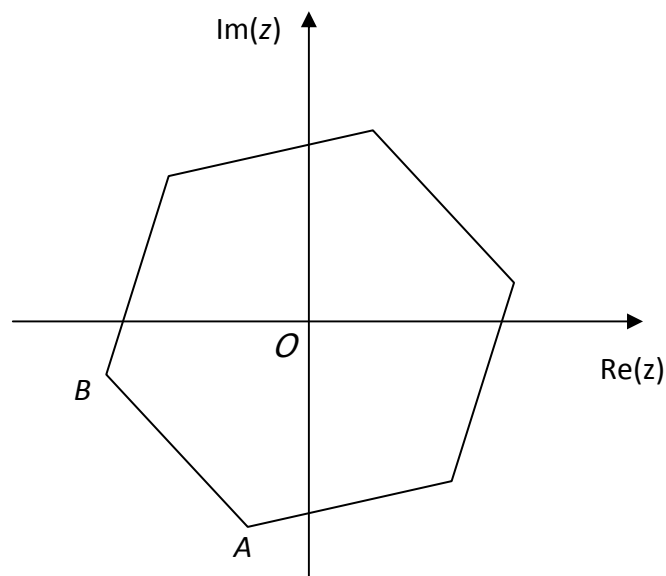


Figura 3

Qual das opções seguintes representa o complexo cuja imagem geométrica é o vértice B .

(A) $64cis\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

(B) $2cis\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

(C) $2cis\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

(D) $64cis\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

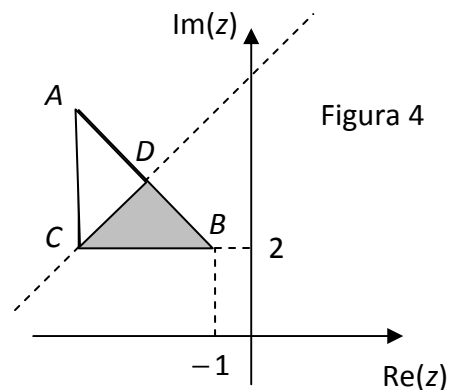
GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

ATENÇÃO: quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, apresente sempre o valor exacto

- 1.** Na figura 4 está representado, no plano complexo, um triângulo rectângulo isósceles $[ABC]$.
- os catetos do triângulo $[ABC]$ têm comprimento 3 e são paralelos aos eixos coordenados.
 - A recta CD é a mediatriz do segmento de recta $[AB]$.

- 1.1.** Defina uma condição, em Complexos, que represente a região sombreada (triângulo $[BCD]$), incluindo a fronteira.



- 1.2.** Seja w o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto C .
Indica a que quadrante pertence o complexo $\frac{1}{w}$
(justifica analiticamente escrevendo $\frac{1}{w}$ na forma algébrica).

- 2.** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória, $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$.

- 2.1.** Prova que,
se A e B forem independentes então \bar{A} e \bar{B} também o são.

- 2.2.** Considera agora que $P(B) = 2P(A)$; $P(A|B) = \frac{1}{3}$ e $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{9}$.
Determina $P(A)$.

3. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por :

$$f(x) = 1 + 3x^2 e^{-x}.$$

Resolva as duas alíneas seguintes sem recorrer à calculadora (não ser para eventuais cálculos numéricos).

3.1. Mostra que f tem um único mínimo e determina-o.

3.2. Mostra que, no intervalo $] -1, 0[$, a equação $f(x) = 4$ tem pelo menos uma solução.

4. Seja f , definida em $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ e^{\sin x + k} & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

4.1. Determina k de modo que a função f seja contínua.

4.2. Considera $k = 0$, determina $f'(\pi)$ por definição.

5. Considera a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por :

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

Resolve as duas alíneas seguintes sem recorrer à calculadora

5.1. Resolve a equação $\ln[f(x)] = x$

5.2. Estuda f quanto à existência de assíntotas verticais e horizontais do seu gráfico.

5.3. No intervalo $[0,5]$, a equação $f(x) = 10$ tem duas soluções.

Sejam A e B os pontos cujas abcissas são as soluções da equação referida.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determina a área do triângulo $[AOB]$, sendo O a origem do referencial.

- Representa todos os gráficos utilizados na resolução do problema
- Assinala os pontos relevantes (vértices do triângulo)
- Efectua os cálculos numéricos para determinar a área pedida

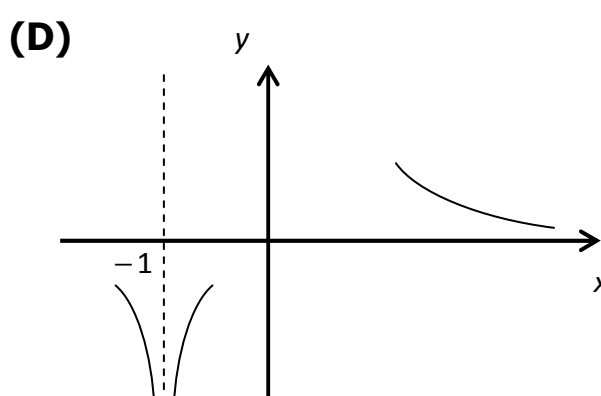
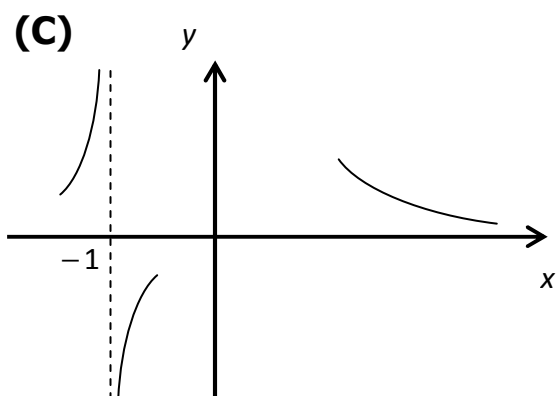
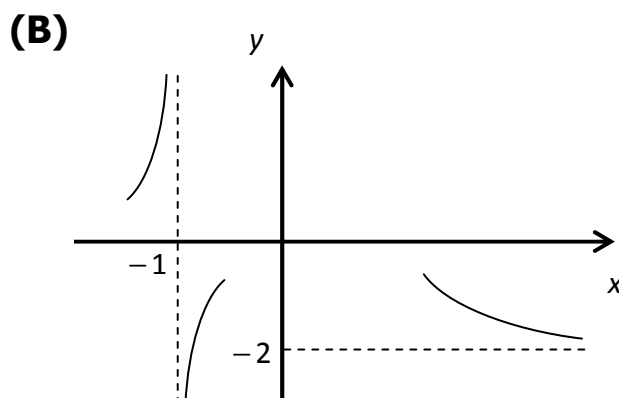
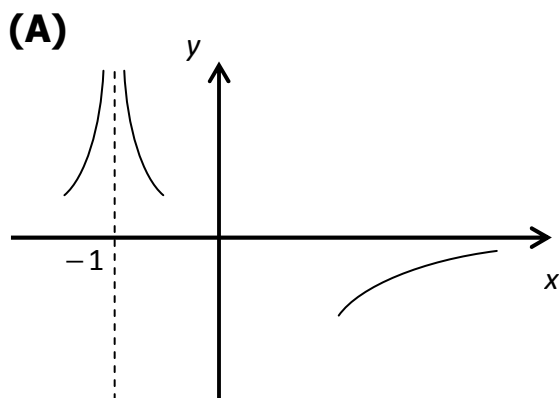
Apresenta o resultado com duas casas decimais.

6. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
 Sabe-se que:

- f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

Em qual das figuras pode estar representado, parte do gráfico da função f' , função derivada de f ?

NOTA: Numa breve composição indica a resposta correcta e justifica as razões que te levaram a anular cada uma das respostas erradas.



FIM