



Previsão Exame Nacional de Matemática A – 2012

Previsão 2 – 1ª fase

## Matemática A

### Previsão 2

Duração do teste: 90 minutos | **4.06.2012**

### 12.º Ano de Escolaridade

**Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.**

**A inscrição nas previsões para 2013 dá acesso à resolução em vídeos das Previsões anteriores.**

**Inscreve-te em "Especial 12.º Ano", após inscrição recibes dados de acesso à tua conta.**

**As resoluções anteriores já estão disponíveis.**

**As Previsões para 2013 (enunciados) são entregues na morada de inscrição, via CTT, dia 7 de Junho de 2013. As resoluções em vídeo ficam disponíveis na tua conta pessoal em [explicamat.pt](http://explicamat.pt)**

**Ao comprar estás a contribuir para este projecto de explicações grátis para todos, obrigado pelo teu contributo.**

## GRUPO I

---

- Os oito itens deste grupo são de escolha múltipla, em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
  - Escreva na sua folha de respostas apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
  - Não apresente cálculos, nem justificações.
  - Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for elegível.
- 

- 1.** Seja  $\Omega$  o espaço de resultados associado a uma determinada experiência aleatória. Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos ( $A \subset \Omega$  e  $B \subset \Omega$ ).

sabe - se que :

- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,3$
- $P(A) = 0,1$
- $A$  e  $B$  são acontecimentos incompatíveis

Qual o valor de  $P(B)$ ?

- (A)** 0,3      **(B)** 0,4      **(C)** 0,5      **(D)** 0,6

- 2.** 6 amigos vão assistir a um jogo de futebol da Seleção Nacional.

Dos 6 amigos, 2 são da cidade do Porto, 2 são de Lisboa e 2 são de Viseu.

No estádio, sentam - se numa fila de 6 cadeiras seguidas.

Qual a probabilidade de os amigos da mesma cidade, sentarem em lugares consecutivos?

- (A)**  $\frac{1}{15}$       **(B)**  $\frac{1}{9}$       **(C)**  $\frac{1}{18}$       **(D)**  $\frac{1}{21}$

- 3.** As alturas dos indivíduos de uma população distribuem - se normalmente com média  $\mu$  e desvio padrão 10cm.

Seja  $X$  a variável aleatória que representa a altura de um indivíduo.

Sabe - se que  $P(X > 182) = 0,15865$ .

O valor médio desta distribuição é :

**(A)**  $\mu = 170$

**(B)**  $\mu = 171$

**(C)**  $\mu = 172$

**(D)**  $\mu = 173$

- 4.** Numa turma do 12.º Ano com 12 raparigas e 7 rapazes, selecionam - se duas pessoas para um trabalho de grupo. sabe - se que foram selecionadas duas pessoas do mesmo sexo.

Qual a probabilidade de terem sido escolhidas duas raparigas?

**(A)**  $\frac{22}{29}$

**(B)**  $\frac{1}{21}$

**(C)**  $\frac{21}{171}$

**(D)**  $\frac{66}{171}$

5. Na figura 1 está parte da representação gráfica de uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .  
 Considera a sucessão de termo geral  $u_n = 2 + \frac{2}{n-2}$ .  
 Qual é o valor de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$ ?

- (A)  $+\infty$   
 (B)  $-\infty$   
 (C)  $2^+$   
 (D)  $2^-$

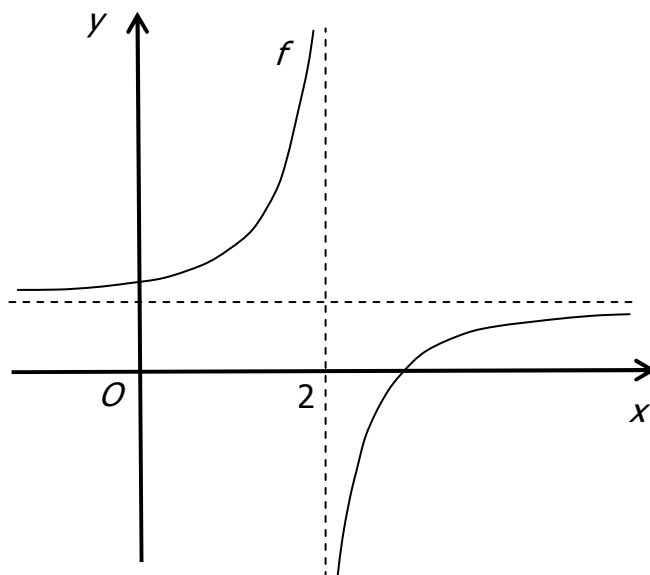


Figura 1

6. Na figura 2, estão representados num referencial o.n.  $xOy$ , os gráficos de duas funções  $f$  e  $g$ . As duas funções têm domínio  $]1,4[$ .  
 Como o gráfico indica,  $f$  tem um máximo para  $x = 2$  e  $g$  tem um mínimo para  $x = 2$ .  
 Qual das opções seguintes é verdadeira para qualquer  $x$  pertencente ao domínio?

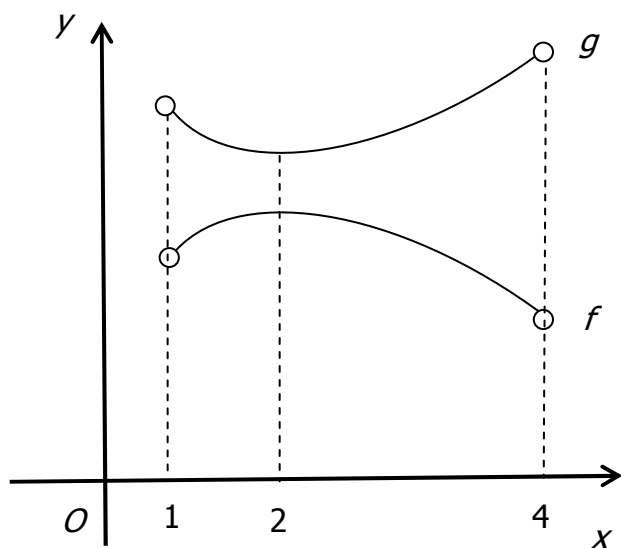


Figura 2

- (A)  $f'(x) \times g'(x) \geq 0$   
 (B)  $f'(x) \times g'(x) < 0$   
 (C)  $f''(x) \times g''(x) \geq 0$   
 (D)  $f''(x) \times g''(x) < 0$

- 7.** Seja  $g$  uma função de domínio  $[0, +\infty[$ .
- $g$  é contínua no seu domínio.
  - $y = 2x - 1$  é assíntota oblíqua do gráfico de  $g$ .

Seja  $f$  uma função de domínio  $[0, +\infty[$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \times g(x) - 1}{x} & \text{se } x \geq 5 \\ e^x - \frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

qual dos valores seguintes é igual a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ?

- (A)** 1                      **(B)** 2                      **(C)** 3                      **(D)** 4

- 8.** Na figura 3, estão representados, no plano complexo, os pontos  $A$  e  $B$ .  
Sabe-se que :
- $A$  e  $B$  são as imagens geométricas de dois complexos  $Z$  e  $W$ , respetivamente.
  - $Z$  e  $W$  são duas das raízes (consecutivas) de índice  $n$  de um mesmo número complexo.
  - A amplitude do ângulo  $AOB$  é  $\frac{\pi}{4}$

Em qual das seguintes opções está indicado o valor de  $n$ ?

- (A)** 6  
**(B)** 7  
**(C)** 8  
**(D)** 9

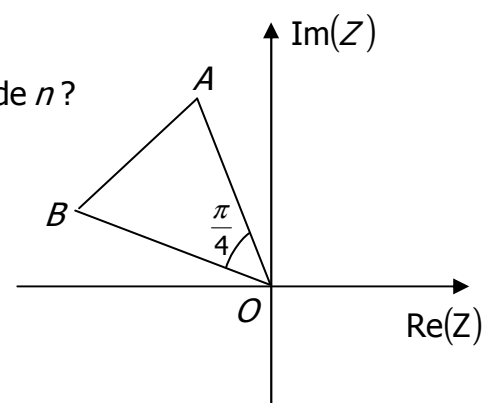


Figura 3

## GRUPO II

---

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

**ATENÇÃO:** quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, apresente sempre o valor exacto

---

**1.** Sejam  $Z_1$  e  $Z_2$ , dois números complexos, tais que :

- $Z_1 = 1 + i$

- $Z_2 = \rho \operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{8}\right), n \in \mathbb{N}$

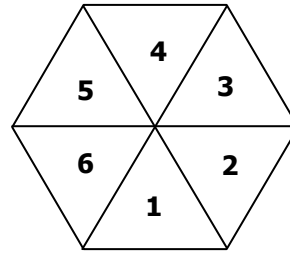
Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

**1.1.** Determina o menor valor de  $n$ , de forma a que,  $Z_1 \times Z_2$  seja um imaginário puro

**1.2.** Considera  $n = 2$ , justifica que a imagem geométrica do complexo  $Z_1 + Z_2$ , pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

**1.3.** Calcula as raízes cúbicas de  $Z_1$  e determina a área do polígono, cujos vértices, são as imagens geométricas das raízes cúbicas obtidas.

Figura 4



- 2.** A Figura 4 representa um rapa hexagonal.  
Considera a seguinte experiência :

Rodar 3 vezes o rapa e verificar o número saído.

Seja  $X$  a variável aleatória «número de vezes que, nos 3 lançamentos, sai par»

- 2.1.** Constrói a tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória  $X$
- 2.2.** Considera agora uma caixa com 3 bolas Brancas e 2 Pretas e a realização da seguinte experiência :

O rapa hexagonal é colocado a rodar uma única vez, se sair par, colocam - se na caixa duas bolas, uma branca e outra preta, se sair ímpar, retiram - se da caixa duas bolas, uma branca e outra preta.  
Após este processo retiramos uma bola da caixa.

Sejam  $A$  e  $B$  os seguintes acontecimentos.

$A$  : «A bola retirada da caixa é Preta»  
 $B$  : «O número saído no rapa é par»

Indica o valor de  $P(A | B)$  sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.  
Deves indicar a resposta com base na Lei de Laplace e explicar :

- O significado de  $P(A | B)$  no contexto do problema
- Número de casos possíveis
- Número de casos favoráveis

- 2.3.** Seja  $\Omega$  o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória, sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos ( $A \subset \Omega$  e  $B \subset \Omega$ ). Sabemos que  $P(B) \neq 0$ .

Mostra que 
$$\frac{P(A) - P(\bar{A} \cup \bar{B}) \times P(A)}{P(B)} = P(A) \times P(A | B)$$

3. Na Figura 5 está representado, em referencial o.n.  $xOy$ , parte do gráfico de uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , cuja expressão analítica é  $f(x) = 2x - x \ln x$

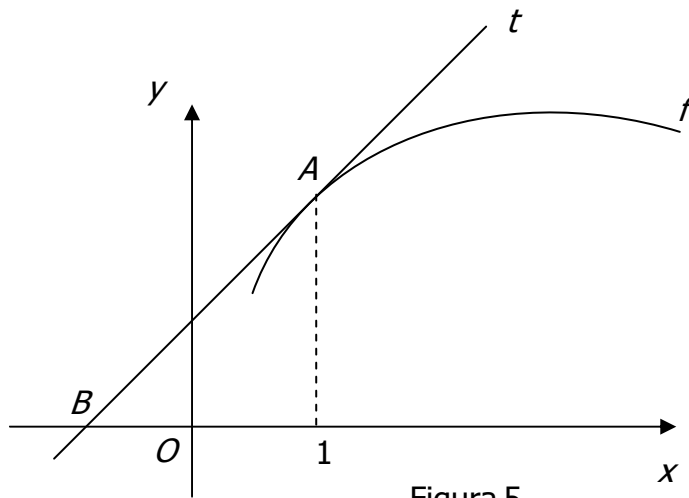


Figura 5

- A recta  $t$  é tangente ao gráfico de  $f$ , no ponto  $A$ , de abcissa 1.
- Seja  $B$  o ponto de interseção da recta  $t$  com o eixo das abcissas.

Determina a área do triângulo  $[AOB]$ .

4. De uma função  $f$  de domínio  $\mathbb{R}^+$ , sabe-se que :

A sua derivada  $f'$ , é dada por  $f'(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

estuda a função  $f$ , quanto ao sentido das concavidades e pontos de inflexão.

5. Considera a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x} & \text{se } x > 0 \\ e^x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

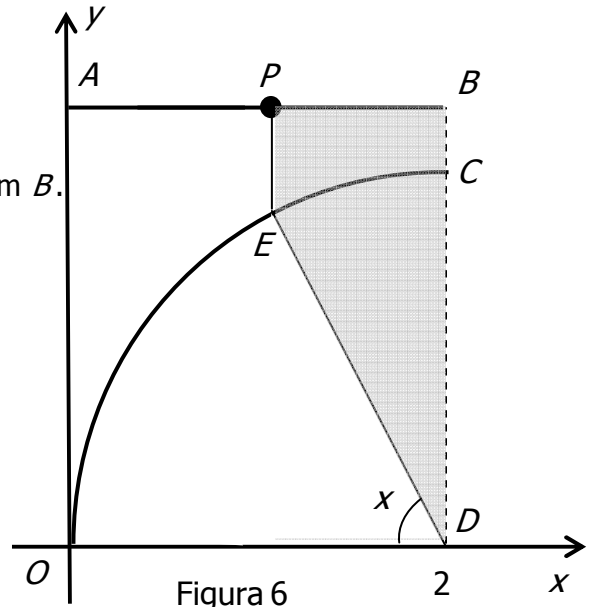
Estuda a continuidade da função  $f$  em todo o seu domínio.

- 6.** Na figura 6, estão representados, em referência l.o.n.  $xOy$  :
- Um arco de circunferência  $OC$ , de centro em  $D$  e raio 2.
  - Um segmento de recta  $[AB]$ .

Um ponto  $P$ , de ordenada  $\frac{5}{2}$ , desloca-se sobre o segmento  $[AB]$ , nunca coincidindo com  $A$  nem com  $B$ .

- $[PE]$  é paralelo a  $[BD]$
- $[ED]$  é um raio da circunferência de centro  $D$ .
- $[OD]$  é perpendicular a  $[BD]$ .

Seja  $x$  a amplitude do ângulo  $ODE$ , em radianos. Para cada posição do ponto  $P$ , considera o trapézio  $[PBDE]$  exemplificado na figura.



Considera ainda uma função  $f$ , que a cada valor da amplitude  $x$ , do ângulo  $ODE$ , faz corresponder a área do trapézio  $[PBDE]$ .

**6.1.** Indica, atendendo apenas ao contexto do problema, o domínio da função  $f$

**6.2.** Mostra que  $f(x) = 5\cos x - \sin(2x)$

**6.3** Considera agora que o domínio da função  $f$  é  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Considera ainda uma função  $g$ , também de domínio  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  definida por  $g(x) = f(x) - 3$ .

A função  $g$  tem zeros no intervalo  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ? justifica

**FIM**