EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto — Programas novos e Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da prova: 150 minutos **2.ª FASE**

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA A / MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implica a anulação de todos os itens de escolha múltipla.

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 12.

A prova inclui um formulário na página 3.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r \quad (\alpha$ *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*$)$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\, maior \times Diagonal\, menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\, maior + Base\, menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ $(\alpha$ *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*$)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r$ *– raio da base*; g *– geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r$ *– raio*$)$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \qquad (r$ *– raio*$)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u'.\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Considere um rectângulo cuja área é igual a 5.

Qual das seguintes expressões representa o perímetro deste rectângulo, em função do comprimento, x, de um dos seus lados?

(A) $2x + \frac{10}{x}$

(B) $2x + \frac{2x}{5}$

(C) $2x + \frac{5}{x}$

(D) $x + \frac{5}{x}$

2. Seja $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 3 - 2\cos x$.

Indique o valor de x para o qual $f(x)$ é máximo.

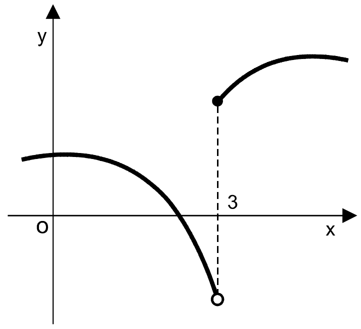
(A) 0

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) π

(D) $\frac{3\pi}{2}$

3. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f, real de variável real.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

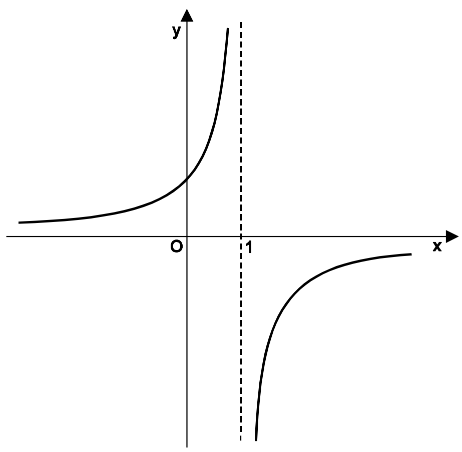
(A) $\lim_{x \to 3} \frac{1}{f(x)} = 0$

(B) $\lim_{x \to 3} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$

(C) $\lim_{x \to 3} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{2}$

(D) Não existe $\lim_{x \to 3} \frac{1}{f(x)}$

4. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função g, real de variável real.
Tal como a figura sugere, a recta de equação $x = 1$ é assimptota do gráfico da função g.



Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = x - 1$.

O valor do $\lim_{x \to 1} \frac{h(x)}{g(x)}$ é:

(A) $-\infty$ **(B)** $+\infty$ **(C)** 0 **(D)** 1

5. Dois cientistas, que vão participar num congresso no estrangeiro, mandam reservar hotel na mesma cidade, cada um sem conhecimento da marcação feita pelo outro.

Sabendo que nessa cidade existem sete hotéis, todos com igual probabilidade de serem escolhidos, qual é a probabilidade de os dois cientistas ficarem no mesmo hotel?

(A) $\frac{1}{7}$ **(B)** $\frac{2}{7}$

(C) $\frac{5}{7}$ **(D)** $\frac{6}{7}$

6. Lançaram-se dois dados, ambos com as faces numeradas de um a seis. Sabe-se que a soma dos números saídos foi quatro.

Qual é a probabilidade de ter saído o mesmo número, em ambos os dados?

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja i a unidade imaginária.

Seja n um número natural tal que $i^n = -i$.

Indique qual dos seguintes é o valor de i^{n+1}.

(A) 1 **(B)** i

(C) -1 **(D)** $-i$

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam:

$$z_1 = 3 + y\,i \qquad \text{e} \qquad z_2 = 4\,i\,z_1$$

(i é a unidade imaginária e y designa um número real).

1.1. Considere que, para qualquer número complexo z não nulo, $\operatorname{Arg}(z)$ designa o argumento de z que pertence ao intervalo $[\,0, 2\pi\,[$.
Admitindo que $\operatorname{Arg}(z_1) = \alpha$ e que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, determine o valor de $\operatorname{Arg}(-z_2)$ em função de α.

1.2. Sabendo que $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$, determine z_2.
Apresente o resultado na forma algébrica.

2. De um baralho de cartas, seleccionaram-se 16 cartas (4 ases, 4 reis, 4 damas e 4 valetes).
Dividiram-se as 16 cartas em dois grupos: um com os ases e os reis e outro com as damas e os valetes.
Retiraram-se, ao acaso, duas cartas de cada grupo (sem reposição).
Qual é a probabilidade de obter um conjunto formado por um ás, um rei, uma dama e um valete, não necessariamente do mesmo naipe?
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Considere um espaço de resultados finito, Ω, associado a uma certa experiência aleatória.

A propósito de dois acontecimentos X e Y $(X \subset \Omega$ e $Y \subset \Omega)$, sabe-se que

$P(X) = a$

$P(Y) = b$

X e Y são independentes

3.1. Mostre que a probabilidade de que não ocorra X nem ocorra Y é igual a

$$1 - a - b + a \times b$$

3.2. Num frigorífico, há um certo número de iogurtes e um certo número de sumos. Tiram-se do frigorífico, ao acaso, um iogurte e um sumo. Sabe-se que a probabilidade de o iogurte ser de pêssego é $\frac{1}{5}$ e a probabilidade de o sumo ser de laranja é $\frac{1}{3}$.

Admita que os acontecimentos «tirar um iogurte de pêssego» e «tirar um sumo de laranja» são independentes.

Utilizando a expressão mencionada em 3.1., determine a probabilidade de, ao tirar, ao acaso, um iogurte e um sumo do frigorífico, o iogurte não ser de pêssego e o sumo não ser de laranja.

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Considere a função g, definida no intervalo $]1, 7[$ por $g(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \ln x}{x}$

($\ln$ designa logaritmo na base e)

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, visualize o gráfico da função g e reproduza-o na sua folha de prova.

Com base nesse gráfico e utilizando as ferramentas adequadas da sua calculadora, resolva o seguinte problema:

Seja g' a função derivada de g. O conjunto solução da inequação $g'(x) < 0$ é um intervalo aberto $]a, b[$. Determine os valores de a e de b. Apresente os resultados arredondados às centésimas.

Justifique a sua resposta.

5. Na figura 1 está representada parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}_0^+$.

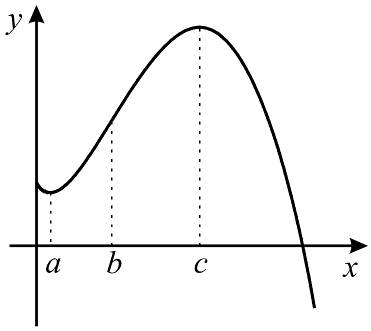


Figura 1

Em cada uma das figuras abaixo está representada parte do gráfico de uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$.

Uma das funções representadas é h', primeira derivada de h, e a outra é h'', segunda derivada de h.

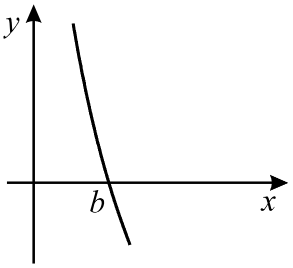


Figura 2

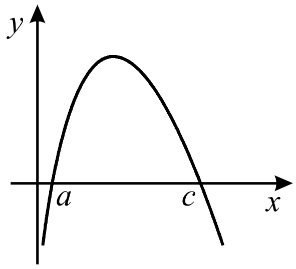


Figura 3

Numa pequena composição, explique em qual das figuras está representado o gráfico da primeira derivada e em qual está representado o gráfico da segunda derivada. Na sua composição, deve referir-se à variação de sinal das funções h' e h'', relacionando-a com características da função h (monotonia e sentido das concavidades do seu gráfico).

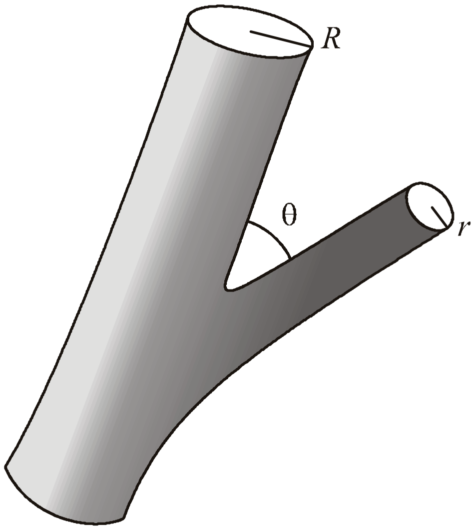
6. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $f(x) = 1 - \ln(x^2)$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos:

6.1. Determine os pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox.

6.2. Estude a função quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

7. Na figura seguinte está representada uma artéria principal do corpo humano, cuja secção é um círculo com raio R, e uma sua ramificação, mais estreita, cuja secção é um círculo com raio r.



A secção da artéria principal tem área A e a da ramificação tem área a.
Seja $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo que a artéria principal faz com a sua ramificação (medida relativamente a duas geratrizes complanares dos dois cilindros).

Sabe-se que $a = A\sqrt{\cos\theta}$

Admitindo que o modelo descrito se adequa com exactidão à situação real, determine θ no caso em que os raios referidos verificam a relação $R = \sqrt[4]{2}\,r$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I ....(7 x 9 pontos)........................... **63 pontos**

Cada resposta certa .... 9 pontos
Cada resposta errada... 0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

Grupo II .... **137 pontos**

1. .... 21 pontos

1.1. ....10 pontos

1.2. ....11 pontos

2. .... 10 pontos

3. .... 22 pontos

3.1. ....12 pontos

3.2. ....10 pontos

4. .... 18 pontos

5. .... 15 pontos

6. .... 34 pontos

6.1. ....16 pontos

6.2. ....18 pontos

7. ....17 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto – Programas novos e Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da prova: 150 minutos **2.ª FASE**

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA A / MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I ....(7 x 9 pontos)...............................**63 pontos**

Cada resposta certa .... 9 pontos
Cada resposta errada... 0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

Grupo II ....**137 pontos**

1. .... 21 pontos
1.1. ....10 pontos
1.2. ....11 pontos

2. .... 10 pontos

3. .... 22 pontos
3.1. ....12 pontos
3.2. ....10 pontos

4. .... 18 pontos

5. .... 15 pontos

6. .... 34 pontos
6.1. ....16 pontos
6.2. ....18 pontos

7. .... 17 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o examinando dê mais do que uma resposta.

Grupo II

1. Se o examinando se enganar na identificação do item a que está a responder, ou se a omitir, mas, pela resolução apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente, a resposta deve ser vista e classificada.

2. Se o examinando apresentar mais do que uma resposta a um item, e não indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, deve ser vista e classificada apenas a que se encontra em primeiro lugar, na folha de resposta.

3. As classificações a atribuir às respostas dos examinandos são expressas, obrigatoriamente, em números inteiros.

4. Num item em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, a classificação a atribuir à resposta deve estar de acordo com o seguinte critério:
   - Se o examinando se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser de zero pontos.
   - Se o examinando não se limitar a apresentar o resultado final, a classificação deve ser a soma algébrica das cotações atribuídas a cada etapa, de acordo com o disposto nos pontos 6, 7, 8, 9, 10 e 11 destes critérios gerais. Se a soma for negativa, a classificação a atribuir é de zero pontos.

5. Alguns itens da prova podem ser correctamente resolvidos por mais do que um processo. Sempre que o examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nos critérios específicos, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas. Salienta-se que deve ser aceite qualquer processo cientificamente correcto, mesmo que envolva conhecimentos não contemplados no programa da disciplina.

6. A cotação de cada item está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para o resolver.

6.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

6.2. O classificador não pode subdividir, em cotações parcelares, a cotação atribuída a cada etapa.
Caso uma etapa envolva um único passo, testando apenas o conhecimento de um só conceito ou propriedade, e a sua resolução não esteja completamente correcta, deve ser atribuída a cotação de zero pontos.
Caso uma etapa envolva mais do que um passo (por exemplo, o cálculo da derivada de uma função, a resolução de uma equação, a obtenção de uma expressão em função de uma variável, etc.) e a sua resolução esteja incompleta, ou contenha incorrecções, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:

- erros de contas ocasionais devem ser desvalorizados em um ponto;
- erros que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades devem ser desvalorizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em um ponto, desde que o grau de dificuldade da etapa não diminua;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em, pelo menos, metade da cotação da etapa, caso o grau de dificuldade da etapa diminua.

6.3. Nas etapas cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho, o classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas. O classificador não pode atribuir uma cotação diferente das indicadas.

6.4. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva classificação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

6.5. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

6.6. Pode acontecer que o examinando, ao resolver um item, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios específicos. Todas as etapas não percorridas explicitamente pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam inequivocamente implícitos na resolução do item, devem receber a cotação indicada.

7. Quando, num item, é pedida uma forma específica de apresentação do resultado final (por exemplo, «em minutos», «em percentagem», etc.), este deve ser apresentado na forma pedida. Se o resultado final apresentado pelo examinando não respeitar a forma pedida no enunciado (por exemplo, se o enunciado pedir o resultado em minutos, e o examinando o apresentar em horas), devem ser atribuídos zero pontos à etapa correspondente ao resultado final. No entanto, a cotação não deve ser desvalorizada caso o examinando não indique a unidade em que é pedido o resultado (por exemplo, se o resultado final for 12 minutos, ou 12 metros, e o examinando escrever simplesmente 12, não se deve aplicar nenhuma desvalorização). Se não for pedida aproximação para o resultado final, o examinando deve apresentar o valor exacto. Se o examinando apresentar, como resultado final, uma aproximação do valor exacto, deve ser aplicada uma desvalorização de 1 ponto na cotação a atribuir à etapa correspondente ao resultado final.

8. O examinando deve respeitar sempre a instrução relativa à apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações. Se, numa etapa, o examinando não respeitar esta instrução, apresentando algo (valor, quadro, tabela, gráfico, etc.) que não resulte de trabalho anterior, deve ser atribuída a cotação de zero pontos a essa etapa. Todas as etapas subsequentes que dela dependam devem ser igualmente classificadas com zero pontos.

9. O examinando deve respeitar sempre qualquer instrução relativa ao método a utilizar na resolução de um item (por exemplo, «sem recorrer à calculadora», «equacione o problema», «resolva graficamente», etc.). Na resolução apresentada pelo examinando, deve ser inequívoco, pela apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações, o cumprimento da instrução. Se tal não acontecer, considera-se que o examinando não respeitou a instrução. A etapa em que se dá o desrespeito e todas as subsequentes que dela dependam devem ser clasificadas com zero pontos.

10. Se, na resolução de um item, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), a classificação total a atribuir à resposta deve ser desvalorizada em um ponto. Esta desvalorização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas classificadas com zero pontos, nem a eventuais utilizações do símbolo de igualdade, onde, em rigor, deveria estar o símbolo de igualdade aproximada.

11. Existem itens em cujo enunciado é dada uma instrução relativa ao número mínimo de casas decimais que o examinando deve conservar sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos. Indicam-se, a seguir, as desvalorizações a aplicar, na classificação total a atribuir à resposta, em caso de desrespeito dessa instrução e/ou de arredondamentos mal efectuados.

Todos os valores intermédios estão de acordo com a instrução, mas existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado.. -1 ponto

Todos os valores intermédios estão bem arredondados, mas existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução... -1 ponto

Existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado e existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução .... -2 pontos

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Cada resposta certa .... 9 pontos
Cada resposta errada.. 0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	A	C	D	C	A	C	A
Versão 2	D	B	A	D	C	A	B

Grupo II

1.1. 10

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Identificar $\frac{\pi}{2}$ como um argumento de $4i$ (escrevendo, por exemplo, $4i = 4\,cis\,\frac{\pi}{2}$) 2

Concluir que $\frac{\pi}{2} + \alpha$ é um argumento de z_2 4

Concluir que $\operatorname{Arg}(-z_2) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$ **(ver nota 1)** 4

2.º Processo:

$-z_2 = -4\,i\,z_1$ 1

Identificar $\frac{3\pi}{2}$ como um argumento de $-4\,i$ (escrevendo,
por exemplo, $-4i = 4\,cis\,\frac{3\pi}{2}$).. 5

Concluir que $\operatorname{Arg}(-z_2) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$ **(ver nota 1)** 4

Notas:

1. Se a expressão apresentada pelo examinado para $\operatorname{Arg}(-z_2)$ for um argumento de $-z_2$ que não pertença a $[0, 2\pi[$ (por exemplo $\operatorname{Arg}(-z_2) = \alpha - \frac{\pi}{2}$), a classificação relativa a esta etapa deve sofrer uma desvalorização de 2 pontos.

2. Se o examinando se limitar a efectuar o produto de $4i$ por z_1 na forma algébrica, a cotação a atribuir à sua resposta deverá ser de zero pontos.

1.2. .... **11**

Escrever $z_2 = 4\,i\,(3 + y\,i)$ 1

Concluir que $z_2 = -4y + 12\,i$ 4

Concluir que $y = 12$ 3

Escrever z_2 na forma algébrica $(z_2 = -48 + 12\,i)$ 3

2. .... **10**

Representando o acontecimento cuja probabilidade se quer calcular por A, a resposta pode ser dada quer na forma $P(A) = \left(\frac{{}^4C_1 \times {}^4C_1}{{}^8C_2}\right)^2$ quer na forma $P(A) = \left(\frac{{}^4A_1 \times {}^4A_1 \times 2}{{}^8A_2}\right)^2$ **(ver notas 1 e 2)**.............................. 9

Apresentar o resultado na forma de fracção irredutível **(ver nota 3)**.................... 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação a atribuir.

<u>1.º caso</u>: Fracções com denominador ${}^8C_2 \times {}^8C_2$ (ou equivalente) e com numerador igual a:

$\left({}^4C_1 \times {}^4C_1\right)^2$ (ou equivalente) 9
${}^4C_1 \times {}^4C_1$ (ou equivalente) 5
Outras situações 2

<u>2.º caso</u>: Fracções com denominador ${}^8A_2 \times {}^8A_2$ (ou equivalente) e com numerador igual a:

$\left({}^4A_1 \times {}^4A_1 \times 2\right)^2$ (ou equivalente) 9
$\left({}^4A_1 \times {}^4A_1\right)^2$ (ou equivalente) 6
${}^4A_1 \times {}^4A_1$ (ou equivalente) 3
Outras situações 2

<u>3.º caso</u>: Fracções com denominador ${}^8C_2$ (ou equivalente) e com numerador igual a:

${}^4C_1 \times {}^4C_1$ (ou equivalente) 3
Outras situações 0

<u>4.º caso</u>: Fracções com denominador ${}^8A_2$ (ou equivalente) e com numerador igual a:

${}^4A_1 \times {}^4A_1 \times 2$ (ou equivalente) 3
Outras situações 0

<u>5.º caso</u>: Fracções com outros denominadores 0

2. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido classificada com zero pontos.

3.1. .... **12**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

<u>1.º Processo:</u>

Traduzir «*probabilidade de que não ocorra* X *nem ocorra* Y» por $P(\overline{X} \cap \overline{Y})$ 3

Aplicar as Leis de De Morgan 2

Aplicar a propriedade relativa à probabilidade do acontecimento contrário 2

Aplicar a propriedade relativa à probabilidade da união de dois acontecimentos.. 2

Aplicar a propriedade relativa à probabilidade da intersecção de dois acontecimentos independentes 2

Conclusão 1

<u>2.º Processo:</u>

Traduzir «*probabilidade de que não ocorra* X *nem ocorra* Y» por $P(\overline{X} \cap \overline{Y})$ 3

Referir que «*se os acontecimentos* X *e* Y *são independentes, então* $\overline{X}$ *e* $\overline{Y}$ *também são*» 3

Aplicar a propriedade relativa à probabilidade da intersecção de dois acontecimentos independentes 2

Aplicar a propriedade relativa à probabilidade do acontecimento contrário 2

Conclusão 2

3.2. .... **10**

Expressão que dá a probabilidade pedida
$\left(1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3}\right)$ **(ver nota 1)**.. 8

Apresentação do resultado na forma de fracção irredutível **(ver nota 2)**............ 2

Notas:

1. Se o examinando se limitar a escrever $a = \frac{1}{5}$ $\left(a = \frac{1}{3}\right)$ e $b = \frac{1}{3}$ $\left(b = \frac{1}{5}\right)$, a clasificação a atribuir a esta etapa deverá ser de 4 pontos.

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido classificada com zero pontos.

4. .... **18**

Apresentar o gráfico de g **(ver nota 1)** 6

Relacionar o sinal de g' com a monotonia de g 4

Indicar os valores de a e de b **(ver nota 2)** 8

Notas:

1. O desrespeito do domínio deve ser desvalorizado em 1 ponto.

2. A apresentação dos valores pedidos deve ser classificada de acordo com o seguinte critério:

Valor de a

<u>1.º Caso</u> (apresentação do resultado com duas casas decimais, de acordo com o enunciado):

Resposta $a \approx 1,36$ 4

Resposta $a \approx 1,35$ ou $a \approx 1,37$ 3

Resposta $a \approx 1,34$ ou $a \approx 1,38$ 1

Outros resultados 0

<u>2.º Caso</u> (apresentação do resultado com mais de duas casas decimais):

Valor de a no intervalo $[1,359\,;\,1,361]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[1,358\,;\,1,362]$ 1

Outros resultados 0

<u>3.º Caso</u> (apresentação do resultado arredondado às décimas):

Valor igual a $1,4$ 1

Outros resultados 0

<u>4.º Caso</u> (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Qualquer resultado 0

Valor de b

1.º Caso (apresentação do resultado com duas casas decimais, de acordo com o enunciado):

Resposta $b \approx 4,61$ 4

Resposta $b \approx 4,60$ ou $b \approx 4,62$ 3

Resposta $b \approx 4,59$ ou $b \approx 4,63$ 1

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com mais de duas casas decimais):

Valor de b no intervalo $[4,610\,;\,4,612]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[4,609\ ;\ 4,613]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas):

Valor igual a $4,6$ 1

Outros resultados 0

4.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Qualquer resultado 0

5. 15

Análise correcta da monotonia de h 3

Relação correcta entre a monotonia de h e o sinal de h'....................................... 3

Análise correcta do sentido das concavidades do gráfico de h 3

Relação correcta entre o sentido das concavidades do gráfico de h e o sinal de h''... 3

Identificação correcta do gráfico de h' e do gráfico de h'' (figuras 3 e 2, respectivamente) 3

Nota:
Caso o examinando se limite a identificar o gráfico de h' e o gráfico de h'', sem qualquer justificação, a cotação a atribuir à sua resposta deverá ser de zero pontos.

6.1. 16

Escrever a equação $f(x) = 0$ 4

Determinar analiticamente as soluções da equação $f(x) = 0$ 10

$1 - ln(x^2) = 0$
$\Leftrightarrow \; ln(x^2) = 1$ 1
$\Leftrightarrow \; x^2 = e$ 5
$\Leftrightarrow \; x = \sqrt{e} \;\; \vee \;\; x = -\sqrt{e}$.................................... (2+2) 4

Pontos pedidos: $(\sqrt{e},\, 0)$, $(-\sqrt{e},\, 0)$ **(ver nota)**.............................. (1+1) 2

Nota:
Se, na etapa anterior, o examinando obtiver apenas uma solução, e, em consequência disso, a resposta apresentar apenas um par ordenado, a classificação a atibuir a esta etapa não deve sofrer qualquer desvalorização, pelo que deverá ser de 2 pontos.

6.2. 18

Cálculo da derivada de f 3

Concluir que f' não tem zeros 3

Estudo do sinal de f' 4
$f'(x) < 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x > 0$ 2
$f'(x) > 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x < 0$ 2

Estudo da função f quanto à monotonia 4
Concluir que f é crescente em $]-\infty,\, 0\,[$ 2
Concluir que f é decrescente em $]\,0,\, +\infty[$ 2

Referir que f não tem extremos 4

7. 17

Escrever $a = \pi r^2$ e $A = \pi R^2$ ....(1+1) 2

Escrever $\pi\, r^2 = \pi R^2 \sqrt{\cos\theta}$ 3

Substituir R por $\sqrt[4]{2}\, r$ na igualdade anterior...4

Concluir que $\cos\theta = \frac{1}{2}$...5

Indicar o valor de θ $\left(\theta = \frac{\pi}{3}\right)$ 3