EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto — Programas novos e Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da prova: 150 minutos **1.ª FASE**

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA A / MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implica a anulação de todos os itens de escolha múltipla.

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 11.

A prova inclui um formulário na página 3.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}$, $k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u \,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u \,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u'.\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Identifique o valor de $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{4-x^2}$

(A) 0

(B) 1

(C) $+\infty$

(D) $-\infty$

2. Sabendo que:

$\ln(x) - \ln(e^{\frac{1}{3}}) > 0$ ($\ln$ designa logaritmo na base e),

um valor possível para x é:

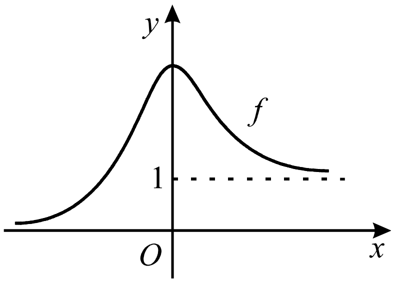
(A) 0

(B) -1

(C) 1

(D) 2

3. Na figura está parte da representação gráfica de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.



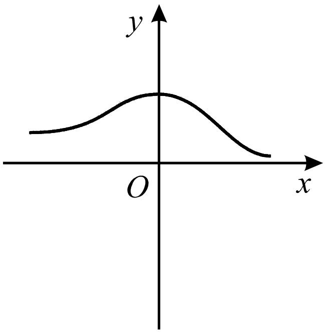
Tal como a figura sugere, o eixo Ox e a recta de equação $y = 1$ são assimptotas do gráfico de f.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \ln[f(x)]$

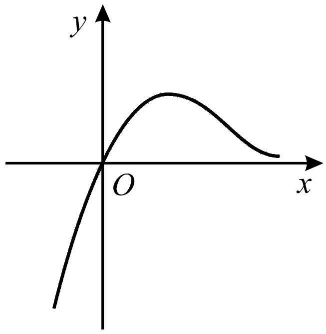
Numa das opções seguintes está parte da representação gráfica da função g.

Em qual delas?

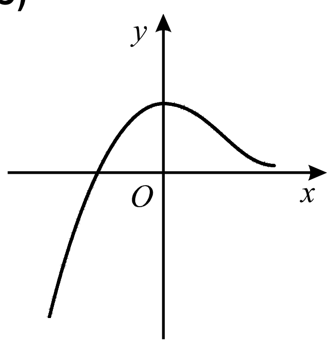
(A)



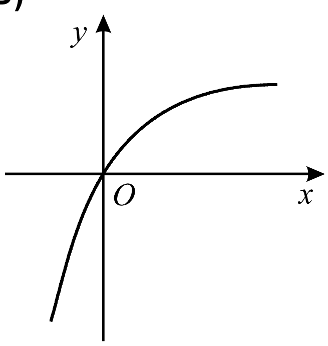
(B)



(C)



(D)



4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que 3 é um zero da função f.

Seja g a função definida por $g(x) = f(x-1) + 4$, para qualquer número real x.

Qual dos seguintes pontos pertence garantidamente ao gráfico da função g ?

(A) $(2,4)$ **(B)** $(4,4)$ **(C)** $(4,8)$ **(D)** $(1,7)$

5. Escolhem-se, ao acaso, dois vértices diferentes de um paralelepípedo rectângulo.

Qual é a probabilidade de que esses dois vértices sejam extremos de uma aresta?

(A) $\frac{12}{{}^8C_2}$ **(B)** $\frac{12}{8^2}$ **(C)** $\frac{8}{{}^8C_2}$ **(D)** $\frac{8}{{}^8A_2}$

6. As cinco letras da palavra TIMOR foram pintadas, cada uma em sua bola.

As cinco bolas, indistinguíveis ao tacto, foram introduzidas num saco.

Extraem-se, aleatoriamente, as bolas do saco, sem reposição, e colocam-se em fila, da esquerda para a direita.

Qual é a probabilidade de que, no final do processo, fique formada a palavra TIMOR, sabendo-se que, ao fim da terceira extracção, estava formada a sucessão de letras TIM?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 1

7. Qual das opções seguintes apresenta duas raízes quadradas de um mesmo número complexo?

(A) 1 e i **(B)** -1 e i

(C) $1-i$ e $1+i$ **(D)** $1-i$ e $-1+i$

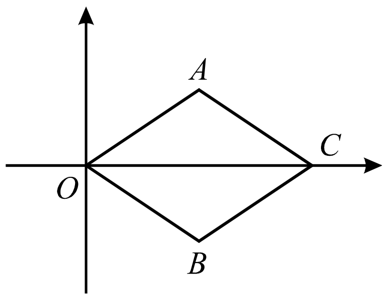
Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando não é pedida a aproximação de um resultado, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \operatorname{cis} \alpha$ $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

1.1. Na figura está representado, no plano complexo, o paralelogramo $[AOBC]$



A e B são as imagens geométricas de z e $\overline{z}$, respectivamente.
C é a imagem geométrica de um número complexo, w.
Justifique que $w = 2\cos\alpha$

1.2. Determine o valor de $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ para o qual $\frac{z^3}{i}$ é um número real.

2. Considere todos os números de três algarismos que se podem formar com os algarismos
$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9.

2.1. Escolhe-se, ao acaso, um desses números.

Sejam os acontecimentos:
A : «O número escolhido é múltiplo de 5»;
B : «O número escolhido tem os algarismos todos diferentes».

Averigúe se A e B são, ou não, acontecimentos independentes.

2.2. Considere o seguinte problema:

De entre todos os números de três algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ *e* 9*, em quantos deles o produto dos seus algarismos é um número par?*
Uma resposta correcta a este problema é: ${}^9A_3 - {}^5A_3$.

Numa pequena composição explique porquê.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A, B e C três acontecimentos $(A \subset \Omega, \quad B \subset \Omega \quad \text{e} \quad C \subset \Omega)$ tais que $(A \cup B) \cap C = \emptyset$.

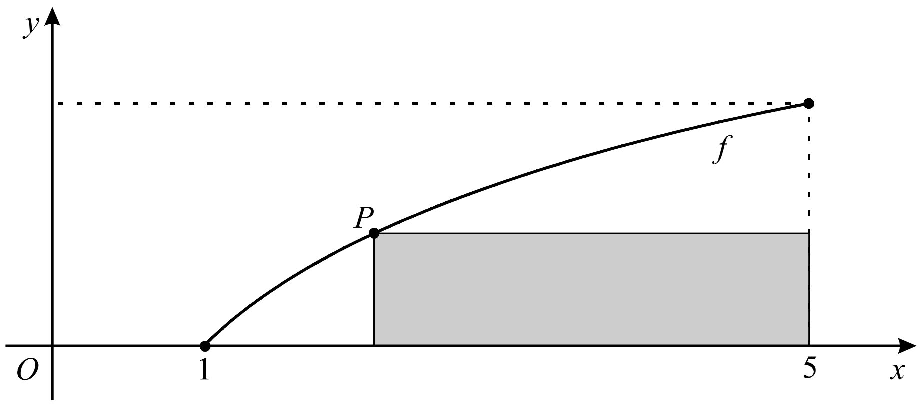
Sabe-se que $P(A) = 0{,}21$ e que $P(C) = 0{,}47$.

Calcule $P(A \cup C)$, utilizando as propriedades das operações com conjuntos e a axiomática das probabilidades.

4. Seja f a função, de domínio $[1, 5]$, definida por $f(x) = \ln x$

($\ln$ designa logaritmo na base e)

Na figura está representado, em referencial ortonormado xOy, o gráfico da função f.



Considere que um ponto P se desloca ao longo do gráfico de f. Para cada posição do ponto P, considere o rectângulo em que um dos lados está contido no eixo Ox, outro na recta de equação $x = 5$ e os outros dois nas rectas vertical e horizontal que passam pelo ponto P.

Exprima a área do rectângulo em função da abcissa de P, e, recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa de P (aproximada às centésimas) para a qual a área do rectângulo é máxima. Apresente os elementos recolhidos na utilização da calculadora:

– o gráfico obtido;

– o ponto de ordenada máxima e respectivas coordenadas.

5. Considere as funções f e g, definidas em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = e^{\,x-1} \quad \text{e} \quad g(x) = \operatorname{sen} x$$

Considere ainda a função h, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = f\,'(x) - g'(x)$

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva os dois itens seguintes:

5.1. Mostre que a função h tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[$

5.2. Tendo em conta **5.1.**, justifique que existe $a \in \left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[$ tal que as rectas tangentes aos gráficos de f e g, nos pontos de abcissa a, são paralelas.

6. Admita que a intensidade da luz solar, x metros abaixo da superfície da água, é dada, numa certa unidade de medida, por

$$I(x) = a\,e^{-b\,x} \qquad (\,x \geq 0\,)$$

a e b são constantes positivas que dependem do instante e do local onde é efectuada a medição.
Sempre que se atribui um valor a a e um valor a b, obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$.

6.1. Medições efectuadas, num certo instante e em determinado local do oceano Atlântico, mostraram que, a 20 metros de profundidade, a intensidade da luz solar era metade da sua intensidade à superfície da água.
Determine o valor de b para esse instante e local. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

6.2. Considere agora $b = 0{,}05$ e $a = 10$.
Estude essa função quanto à monotonia e existência de assimptotas do seu gráfico.
Interprete os resultados obtidos no contexto da situação descrita.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I .... (7 x 9 pontos) .... **63 pontos**

Cada resposta certa .... 9 pontos
Cada resposta errada.. 0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

Grupo II .... **137 pontos**

1. .... 21 pontos

1.1. .... 11 pontos

1.2. .... 10 pontos

2. .... 22 pontos

2.1. .... 10 pontos

2.2. .... 12 pontos

3. .... 10 pontos

4. .... 18 pontos

5. .... 34 pontos

5.1. .... 16 pontos

5.2. .... 18 pontos

6. .... 32 pontos

6.1. .... 16 pontos

6.2. .... 16 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade

**(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto — Programas novos
e Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)**

Duração da prova: 150 minutos **1.ª FASE**

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA A / MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I ....(7 x 9 pontos)..............................**63 pontos**

Cada resposta certa .... 9 pontos
Cada resposta errada.. 0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

Grupo II ....**137 pontos**

1. .... 21 pontos

1.1. ....11 pontos
1.2. ....10 pontos

2. .... 22 pontos

2.1. ....10 pontos
2.2. ....12 pontos

3. .... 10 pontos

4. .... 18 pontos

5. .... 34 pontos

5.1. ....16 pontos
5.2. ....18 pontos

6. .... 32 pontos

6.1. ....16 pontos
6.2. ....16 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

V.S.F.F.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

A ausência de indicação da versão da prova implica a anulação de todos os itens de escolha múltipla.
Devem ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o examinando dê mais do que uma resposta.

Grupo II

1. Se o examinando se enganar na identificação do item a que está a responder, ou se a omitir, mas, pela resolução apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente, a resposta deve ser vista e classificada.

2. Se o examinando apresentar mais do que uma resposta a um item, e não indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, deve ser vista e classificada apenas a que se encontra em primeiro lugar, na folha de resposta.

3. As classificações a atribuir às respostas dos examinandos são expressas, obrigatoriamente, em números inteiros.

4. Num item em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, a classificação a atribuir à resposta deve estar de acordo com os seguintes critérios:
- Se o examinando se limitar a apresentar o resultado final, a classificação deve ser de zero pontos.
- Se o examinando não se limitar a apresentar o resultado final, a classificação deve ser a soma algébrica das classificações atribuídas a cada etapa, de acordo com o disposto nos pontos 6, 7, 8, 9, 10 e 11 destes critérios gerais. Se a soma for negativa, a classificação a atribuir é de zero pontos.

5. Alguns itens da prova podem ser correctamente resolvidos por mais do que um processo. Sempre que o examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nos critérios específicos, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas. Salienta-se que deve ser aceite qualquer processo cientificamente correcto, mesmo que envolva conhecimentos não contemplados no Programa da disciplina.

6. A cotação de cada item está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para o resolver.

   6.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

   6.2. O classificador não pode subdividir, em cotações parcelares, a cotação atribuída a cada etapa.
   Caso uma etapa envolva um único passo, testando apenas o conhecimento de um só conceito ou propriedade, e a sua resolução não esteja completamente correcta, deve ser atribuída a classificação de zero pontos.
   Caso uma etapa envolva mais do que um passo (por exemplo, o cálculo da derivada de uma função, a resolução de uma equação, a obtenção de uma expressão em função de uma variável, etc.) e a sua resolução esteja incompleta, ou contenha incorrecções, a classificação a atribuir deve estar de acordo com o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
   - erros de contas ocasionais devem ser desvalorizados em um ponto;
   - erros que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades devem ser desvalorizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa;
   - transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em um ponto, desde que o grau de dificuldade da etapa não diminua;
   - transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em, pelo menos, metade da cotação da etapa, caso o grau de dificuldade da etapa diminua.

   6.3. Nas etapas cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho, o classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas. O classificador não pode atribuir uma cotação diferente das indicadas.

   6.4. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva classificação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

   6.5. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a classificação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a classificação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

   6.6. Pode acontecer que o examinando, ao resolver um item, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios específicos. Todas as etapas não percorridas explicitamente pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam inequivocamente implícitos na resolução do item, devem receber a cotação indicada.

7. Quando, num item, é pedida uma forma específica de apresentação do resultado final (por exemplo, «em minutos», «em percentagem», etc.), este deve ser apresentado na forma pedida. Se o resultado final apresentado pelo examinando não respeitar a forma pedida no enunciado (por exemplo, se o enunciado pedir o resultado em minutos, e o examinando o apresentar em horas), devem ser atribuídos zero pontos à etapa correspondente ao resultado final. No entanto, a resposta não deve ser desvalorizada caso o examinando não indique a unidade em que é pedido o resultado (por exemplo, se o resultado final for 12 minutos, ou 12 metros, e o examinando escrever simplesmente 12, não se deve aplicar nenhuma desvalorização). Se não for pedido um resultado final com aproximação, o examinando deve apresentar o valor exacto. Se o examinando apresentar, como resultado final, uma aproximação do valor exacto, deve ser aplicada uma desvalorização de 1 ponto na etapa correspondente ao resultado final.

8. O examinando deve respeitar sempre a instrução relativa à apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações. Se, numa etapa, o examinando não respeitar esta instrução, apresentando algo (valor, quadro, tabela, gráfico, etc.) que não resulte de trabalho anterior, deve ser atribuída a cotação de zero pontos a essa etapa. Todas as etapas subsequentes que dela dependam devem ser igualmente classificadas com zero pontos.

9. O examinando deve respeitar sempre qualquer instrução relativa ao método a utilizar na resolução de um item (por exemplo, «sem recorrer à calculadora», «equacione o problema», «resolva graficamente», etc.). Na resolução apresentada pelo examinando, deve ser inequívoco, pela apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações, o cumprimento da instrução. Se tal não acontecer, considera-se que o examinando não respeitou a instrução. A etapa em que se dá o desrespeito e todas as subsequentes que dela dependam devem ser classificadas com zero pontos.

10. Se, na resolução de um item, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), a classificação total a atribuir à resposta deve ser reduzida em um ponto. Esta desvalorização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas classificadas com zero pontos, nem a eventuais utilizações do símbolo de igualdade, onde, em rigor, deveria estar o símbolo de igualdade aproximada.

11. Existem itens em cujo enunciado é dada uma instrução relativa ao número mínimo de casas decimais que o examinando deve conservar sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos. Indicam-se, a seguir, as desvalorizações a aplicar, na classificação total a atribuir à resposta, em caso de desrespeito dessa instrução e/ou de arredondamentos mal efectuados.

Todos os valores intermédios estão de acordo com a instrução, mas existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado.. -1 ponto

Todos os valores intermédios estão bem arredondados, mas existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução... -1 ponto

Existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado e existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução .... -2 pontos

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Cada resposta certa .... 9 pontos
Cada resposta errada.. 0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	D	D	C	B	A	C	D
Versão 2	C	C	A	D	B	A	B

Grupo II

1.1. 11

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

Utilizando a regra do paralelogramo pode concluir-se que $w = z + \overline{z}$.
Recorrendo à representação trigonométrica de z e $\overline{z}$, resulta que
$z + \overline{z} = cis(\alpha) + cis(-\alpha) = 2\cos\alpha$.

A classificação deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

Utilizar a regra do paralelogramo para concluir que $w = z + \overline{z}$ 6

Somar z com $\overline{z}$ para obter o resultado pedido 5

Nota:

Uma alternativa consiste em começar por concluir que $z + \overline{z} = 2\cos\alpha$, e utilizar argumentos geométricos para concluir que a «abcissa de C» $= 2\cos\alpha$.
Se forem percorridas estas etapas, a cotação deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

Calcular $z + \overline{z}$ e obter $z + \overline{z} = 2\cos\alpha$...5

Utilizar argumentos geométricos para concluir que a «abcissa» de C $= 2\cos\alpha$...6

1.2. .... **10**

Imposição que $\frac{z^3}{i}$ seja real **(ver nota)** e respectiva tradução analítica 6

Esta cotação deve ser distribuída de acordo com as seguintes etapas:

escrever $z^3 = cis(3\alpha)$..2

escrever $\frac{z^3}{i} = cis\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$...2

escrever $3\alpha - \frac{\pi}{2} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$...2

Resolução da equação 2

Aceitação da única solução $\left(\alpha = \frac{\pi}{6}\right)$, de acordo com a restrição indicada no enunciado.. 2

Nota:

Uma alternativa consiste em impor que o número z^3 seja um imaginário puro, que conduz directamente a $3\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, omitindo a etapa intermédia $\left(\frac{z^3}{i} = cis\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)$ da resolução anterior. Em conformidade, as cotações desta etapa e da seguinte (da resolução anterior) devem fundir-se numa cotação única de 4 (quatro) pontos, associada à escrita da equação $3\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2.1. .... **10**

Existem três possibilidades para a resolução deste item: **(ver nota 1)**

Provar que $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ **(ver nota 2)**......................................10

Provar que $P(A\,|\,B) = P(A)$, notando que $P(B) \neq 0$ **(ver nota 3)**............ 10

Provar que $P(B\,|\,A) = P(B)$, notando que $P(A) \neq 0$ **(ver nota 4)**........... 10

Notas:

1. As segunda e terceira hipóteses podem ainda desdobrar-se no cálculo de $P(A \cap B)$ e na utilização da fórmula da probabilidade condicionada. Se essa for a escolha do examinando, as sucessivas etapas têm a mesma cotação (2 pontos) das etapas idênticas referidas na primeira hipótese. Se o examinando não referir o facto do não anulamento de $P(A)$ $\left(P(B)\right)$, a resposta deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2. Se o examinando escolher esta possibilidade, a classificação deve ser distribuída de acordo com o seguinte critério:

Indicar correctamente o número de casos possíveis no contexto do espaço de resultados associado ao problema (9^3, ou equivalente)..2

Indicar correctamente o número de casos favoráveis associado à probabilidade de $A \cap B$ $\left({}^8A_2\text{, ou equivalente}\right)$ 2

Indicar correctamente o número de casos favoráveis associado à probabilidade de A $\left(9^2\text{, ou equivalente}\right)$ 2

Indicar correctamente o número de casos favoráveis associado à probabilidade de B $\left({}^9A_3\text{, ou equivalente}\right)$ 2

Concluir que $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ 2

3. Se o examinando escolher esta possibilidade, a classificação deve ser distribuída de acordo com os seguintes critérios:

Indicar correctamente o número de casos possíveis associado à probabilidade de $A\,dado\;B$ $\left({}^9A_3\text{, ou equivalente}\right)$.................................. 2

Indicar correctamente o número de casos favoráveis associado à probabilidade de $A\,dado\;B$ $\left({}^8A_2\text{, ou equivalente}\right)$ 2

Indicar correctamente o número de casos possíveis e favoráveis associado à probabilidade de A
$\left(9^3 \text{ e } 9^2\text{, ou equivalente, respectivamente}\right)$............................. (1+2) 3

Referência ao facto de ser $P(B) \neq 0$ 1

Concluir que $P(A\,|\,B) = P(A)$ 2

4. Se o examinando escolher esta possibilidade, a classificação deve ser distribuída de acordo com os seguintes critérios:

Indicar correctamente o número de casos possíveis associado à probabilidade de $B\,dado\,A$ $\left(9^2\text{, ou equivalente}\right)$ 2

Indicar correctamente o número de casos favoráveis associado à probabilidade de $B\;dado\;A$ $\left({}^8A_2\text{, ou equivalente}\right)$ 2

Indicar correctamente o número de casos possíveis e favoráveis associado à probabilidade de B
$\left(9^3 \text{ e } {}^9A_3\text{, ou equivalente, respectivamente}\right)$.....................................(1+2) 3

Referência ao facto de ser $P(A) \neq 0$ 1

Concluir que $P(B\,|\,A) = P(B)$ 2

2.2. .... **12**

Para que a composição possa ser considerada completa deverá contemplar **explicitamente** os seguintes pontos:

- referência a quantos números de três algarismos diferentes *se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9;*

- referência a quantos destes números, de três algarismos diferentes, são formados por algarismos ímpares;

- o reconhecimento de que o resultado final é a diferença destas duas quantidades.

A classificação deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

A composição contempla os três pontos 12

A composição contempla dois pontos 8

A composição contempla um ponto 4

3. .... **10**

O examinando deduz de $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ que $A \cap C = \emptyset$
(ver nota 1)... 6

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ 3

Concluir que $A \cap C = \emptyset$ 3

O examinando menciona o resultado anterior $(A \cap C = \emptyset)$ para escrever $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$ e efectua o respectivo cálculo **(ver nota 2)**... 4

Notas:

1. O examinando pode justifcar que $A \cap C = \emptyset$ sem utilizar a propriedade distributiva, argumentando, por exemplo, que, se $A \cup B$ não tem elementos comuns com C, o mesmo se passa com A.

2. Se o examinando não mencionar o resultado anterior, a classificação a atribuir a esta etapa deve ser de 2 pontos.

4. .... **18**

Expressão da função que dá a área do rectângulo 6

Valor pedido **(ver nota 1)** 6

Elementos recolhidos na utilização da calculadora **(ver nota 2)**.................... 6

Notas:

1. A escrita do valor pedido deve ser classificada de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado com duas casas decimais, de acordo com o enunciado):

Resposta $2{,}57$ 6

Resposta $2{,}56$ ou $2{,}58$ 4

Resposta $2{,}55$ ou $2{,}59$ 2

Resposta $2{,}54$ ou $2{,}60$ 1

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com mais de duas casas decimais):

Valor no intervalo $[2{,}570\ ;\ 2{,}573]$ 4

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[2{,}560\ ;\ 2{,}580]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[2{,}550\ ;\ 2{,}590]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas):

Valor igual a $2{,}6$ 1

Outros resultados 0

4.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Qualquer resultado 0

2. Os 6 pontos relativos à apresentação dos elementos recolhidos na utilização da calculadora devem ser atribuídos de acordo com os seguintes critérios:

Apresentação correcta do gráfico da função, no seu domínio $[1, 5]$, bem como do ponto de ordenada máxima* 6

Apresentação do gráfico, bem como do ponto de ordenada máxima*, mas o gráfico não respeita o domínio $[1, 5]$ (por exemplo, contém pontos de ordenada negativa) 4

Apresentação correcta do gráfico da função, no seu domínio $[1, 5]$, mas o ponto de ordenada máxima* não está devidamente assinalado 3

Apresentação do gráfico, mas este não respeita o domínio $[1, 5]$ e o ponto de ordenada máxima* não está devidamente assinalado 1

Ausência de explicação, simples referências do tipo «*Vi na calculadora*» ou utilização de processo não gráfico, como, por exemplo, uma tabela.. 0

* Considera-se correcta a apresentação de um ponto concordante com o valor da abcissa analisado na nota 1.

5.1. 16

Calcular $f\,'(x) = e^{\,x-1}$ 2

Calcular $g'(x) = \cos x$ 2

Calcular $h(0)$ 2

Calcular $h(\frac{\pi}{2})$.. 2

Referir que h é uma função contínua 3

Recorrer ao Teorema de Bolzano para justificar a existência de, pelo menos, um zero de h no interior do intervalo considerado **(ver nota)**....... 5

Nota: Se o examinando concluir o pretendido, mas não referir que tal conclusão resulta do Teorema de Bolzano, a classificação a atribuir a esta etapa deverá ser de 3 pontos.

5.2. .... **18**

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

Do item anterior resulta que existe, pelo menos, um ponto a entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ tal que $h(a) = 0$, ou seja, $f\,'(a) = g'(a)$. Ora, como a derivada de uma função diferenciável num ponto é igual ao declive da recta tangente ao gráfico da função nesse ponto, então existe um ponto onde as rectas tangentes aos gráficos de f e g têm o mesmo declive, ou seja, são paralelas.

Tal como o exemplo atrás ilustra, o examinando deve:

Reconhecer que a derivada num ponto, para uma função diferenciável, é igual ao declive da recta tangente ao gráfico da função nesse ponto e identificar as funções f e g como funções diferenciáveis em $\left]0\,,\ \frac{\pi}{2}\right[$.
Caso o examinando já tenha calculado as derivadas de f *e de* g no item anterior, esta identificação está implícita nessa resposta.................................... 8

Notar que a alínea anterior, invocada como resultado, implica a existência de um ponto a, no intervalo $\left]0\,,\ \frac{\pi}{2}\right[$, tal que $f\,'(a) = g'(a)$ 6

Concluir que nesse ponto a, sendo os declives das tangentes aos gráficos iguais, essas tangentes são paralelas 4

6.1. .... **16**

Cálculo do valor de $I(0)$, em função de a e de b...................................... 4

Cálculo do valor de $I(20)$, em função de a e de b.................................... 4

Escrever a equação que relaciona $I(20)$ com $I(0)$.................................... 3

Cálculo do valor numérico de b, apresentando o seu valor arredondado às centésimas... 5

6.2. .... **16**

Determinar $I\,'(x)$.. 2

Estudar o sinal de $I\,'(x)$... 2

Concluir que a função I é monótona decrescente... 1

Referir, justificando, que o gráfico de I não admite assimptotas verticais.. 2

Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$ 2

Identificação da recta de equação $y = 0$ como assimptota horizontal do gráfico de I... 2

Reconhecimento de que, à medida que a luz vai penetrando em maior profundidade na água, vai perdendo intensidade 3

Mencionar que, quando a profundidade aumenta indefinidamente, a intensidade da luz tende para zero 2